INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XVIII. BAND DRITTES HEFT 1950

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DMark 26.80

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 25 Bogen vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. **A. Hertwig**, Berlin-Charlottenburg, Technische Universität, Hardenbergstraße 34

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Karlsruhe i. Baden, Technische Hochschule

Professor **K. v. Sanden**, Karlsruhe-Land I, Rosmarinstraße 11

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Braunschweig, Harzburger Straße 8 a

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24
Fernsprecher 2440

Berlin-Charlottenburg 2
Jebensstraße 1
Fernsprecher 32 20 70

Vertriebs-Vertretungen des Verlages im Ausland:

Schweiz ..... Lange, Maxwell & Springer A.G., Basel, Schützenmattstraße 43
Frankreich ..... Lange, Maxwell & Springer S.A., 24, Rue des Ecoles, Paris (V°)
England, USA. und übriges Ausland Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Hain, Kurt, Punktlagenzuordnungen mit gegebener Tangentenrichtung am Gelenkviereck. Mit 14 Textabbildungen 141

Hausenblas, Helmut, Die nichtisotherme laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren. Mit 11 Textabbildungen 151

Bach, Kurt, Die Verwirklichung vorgegebener Winkelgeschwindigkeitsgesetze bei Doppelkurbelgetrieben. Mit 12 Textabbildungen 167

Jung, Hans, Ein Beitrag zur Loveschen Verschiebungsfunktion. Mit 8 Textabbildungen 178

Moheit, W., Die Gelenkwirkung von Flanschverbindungen. Mit 9 Textabbildungen 191

Traenkle, Carl August, Bewegungsverlauf und Abstimmbedingungen von Nachführgetrieben. Mit 19 Textabbildungen 198

Zerna, Wolfgang, Allgemeine Grundgleichungen der Elastizitätstheorie. Mit 3 Textabbildungen 211

INGENIEUR-ARCHIV

XVIII. BAND DRITTES HEFT 1950

Punktlagenzuordnungen mit gegebener Tangentenrichtung am Gelenkviereck.

Von K. Hain.

1. Allgemeines. Eine wichtige getriebetechnische Aufgabe besteht darin, eine gegebene Kurve mit Hilfe eines Gelenkvierecks zu erzeugen. Man nimmt zu diesem Zwecke beispielsweise auf dieser Kurve eine Anzahl von Punktlagen an, die dann genau von einem Koppelpunkt des Gelenkvierecks durchlaufen werden. Zwischen den angenommenen Punkten werden dann mehr oder weniger große Abweichungen von der gegebenen Kurvenform auftreten. Es ist klar, daß mit der Anzahl der genau durchlaufenen Punkte auch an die Genauigkeit höhere Ansprüche gestellt werden können.

Man kann die Aufgabe auch so formulieren, daß man in bestimmten Punkten zusätzlich die Richtung der Tangente an die von dem Koppelpunkt beschriebene Kurve vorschreibt. Man erreicht dadurch in diesen Punkten eine besonders gute Angleichung an die gegebene Kurvenform. Von dem Koppelpunkt eines Gelenkvierecks können theoretisch neun Punkte genau durchlaufen werden[1]. Es müssen deshalb die allgemeinen Feststellungen von *Konietschke*[2], der sich auf fünf Punkte beschränkt, berichtigt werden. Wegen des schwierigen rechnerischen Ansatzes kann man allerdings eine Anzahl von neun Punkten nicht erreichen, so lange keine Möglichkeit besteht, neun Gleichungen mit neun Unbekannten hohen Grades aufzulösen.

Mit den zeichnerischen Verfahren der Kreispunkt- und Mittelpunktkurve konnte man nur fünf Punktlagen beherrschen, weil man im allgemeinen die Lage eines festen Drehpunktes, die Kurbellänge und die Länge einer Koppelgeraden willkürlich annahm. Man kann für den allgemeinen Fall sieben Punktlagen beherrschen, wenn man Punktlagenreduktionen durch entsprechende Maßnahmen erhält. Es fallen dabei beim Gelenkviereck paarweise zwei bestimmte Punktlagen in je eine solche zusammen, so daß zuletzt die Aufgabe übrig bleibt, nur durch drei oder vier Punkte einen Kreis zu zeichnen.

Die Richtung der Tangente einer ebenen Kurve ist durch zwei unendlich benachbarte Punkte bestimmt; das heißt also: bei vorgeschriebener Tangente in einem Punkt ist ein unendlich benachbarter zweiter Punkt zu erfüllen. Theoretisch können damit für das Gelenkviereck beispielsweise acht Punkte und eine Tangente oder fünf Punkte und vier Tangenten usw. verwirklicht werden. Bei Benutzung von Punktlagenreduktionen liegt die Höchstzahl z. B. bei sechs Punkten und einer Tangente oder bei fünf Punkten und zwei Tangenten usw. Bei geringeren Anforderungen stehen, wie bei allen getriebetechnischen Aufgaben, willkommene Auswahlmöglichkeiten bezüglich der Bemessung der Getriebeglieder zur Verfügung, so daß in jedem Falle eine genaue Überprüfung der Aufgabenstellung hinsichtlich möglichst geringer Anforderungen wünschenswert ist.

Die Verwendung der Punktlagenreduktionen erlaubt gegenüber den bekannten Verfahren[2] die Erfüllung um zwei Punktlagen höherer Ansprüche und bei geringerer Anzahl von vier Punktlagen größere Auswahlmöglichkeiten[3 4] für die Maßbestimmung. Für reine Punktlagenzuordnungen wurden vom Verfasser bereits zwei grundsätzlich verschiedene Lösungsmöglichkeiten bekanntgegeben, die beim Versagen der einen Konstruktion oder bei ungünstigen Gliedabmessungen die willkommene Möglichkeit bieten, die jeweils andere Konstruktion zu benutzen. Beide Verfahren sollen im folgenden auch auf den Fall gegebener Tangenten erweitert werden.

2. Einfache Konstruktion ohne Punktlagenreduktion. An einem einfachen Beispiel sollen zunächst ohne Zuhilfenahme von Punktlagenreduktionen die wesentlichen Merkmale dargestellt

---

[1] *H. Alt*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923) S. 13.

[2] *W. Konietschke*, Ing.-Arch. 12 (1941) S. 133, insbes. S. 137.

[3] *K. Hain*, Maschinenbau/Betrieb, Beilage Getriebetechnik 11 (1943) S. 29.

[4] *K. Hain*, Meßtechnik 20 (1944) S. 33 und S. 59.

werden. In Abb. 1 sollen zwei Punktlagen E_1 und E_2 und im Punkt E_1 die Richtung der Tangente t_1 gegeben sein. Man kann hierbei z. B. noch die Gestellpunkte A_0 und B_0, die Kurbellänge A_0A und die Koppelgerade EA vorschreiben.

Beim Gelenkviereck ist bekanntlich die Richtung der Bahntangente dadurch bestimmt, daß die im Berührungspunkt errichtete Normale durch den augenblicklichen Pol (Momentanpol) geht, wobei dieser Pol bestimmt ist als Schnittpunkt der beiden im Gestell gelagerten Glieder des Gelenkvierecks. Man kann also die Aufgabe auch so formulieren, daß an Stelle der Tangente die Normale gegeben ist.

Man zeichnet in Abb. 1 den Kurbelkreis mit dem angenommenen Halbmesser $A_0A_1 = A_0A_2$ und macht $E_1A_1 = E_2A_2$. Der Schnittpunkt der auf der in E_1 gegebenen Tangente t_1 senkrecht stehenden Normalen n_1 mit A_0A_1 ergibt den augenblicklichen Pol P_1. Macht man $\Delta E_1A_1B_{02} = \Delta E_2A_2B_0$, so stellt die Mittelsenkrechte b_{12} auf B_0B_{02} einen geometrischen Ort für die Gelenkpunktlage B_1 dar. Den Punkt B_1 findet man als Schnittpunkt von b_{12} mit der Verbindungsgeraden B_0P_1. Nach den angegebenen Annahmen gibt es also nur einen möglichen Punkt B_1.

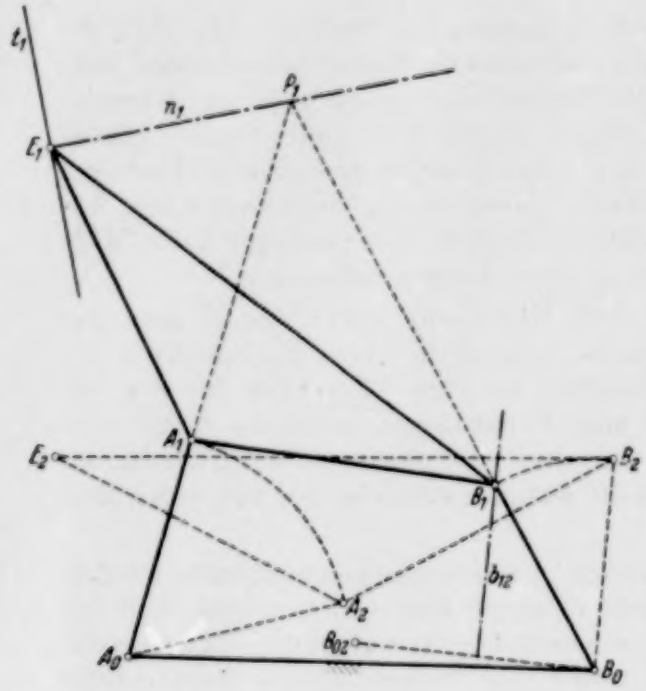


Abb. 1. Konstruktion eines Gelenkvierecks für zwei Punktlagen und eine Tangente ohne Punktlagenreduktionen.

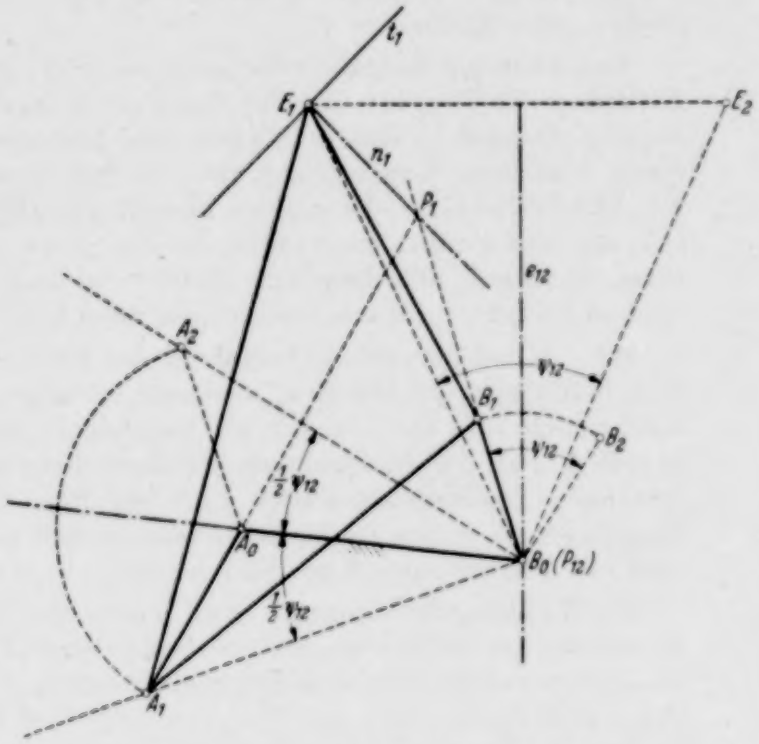


Abb. 2. Gegeben zwei Punktlagen und eine Tangente, Gestellpunkt B_0 auf der Mittelsenkrechten e_{12} von E_1E_2.

3. Punktlagenreduktionen eines Gestellpunktes. Bei gleicher Aufgabenstellung wie in Abb. 1 erhält man bei denselben Annahmen für die Gelenkpunktlage B_1 unendlich viele Möglichkeiten, wenn man in Abb. 2 einen Gestellpunkt, beispielsweise B_0, auf der Mittelsenkrechten e_{12} der Strecke E_1E_2 beliebig annimmt. Wenn der Gestellpunkt A_0 gegeben ist, trägt man an A_0B_0 in B_0 den Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ in derjenigen Richtung an, wie E_1 zu E_2 liegt, wenn $\psi_{12} = \sphericalangle E_1B_0E_2$ ist. Auf dem freien Schenkel des Winkels $\frac{1}{2}\psi_{12}$ nimmt man beliebig einen Punkt A_1 an und erhält den Pol P_1 als Schnittpunkt der Geraden A_1A_0 mit der gegebenen Normalen n_1. Die Kurbellage A_0A_2 liegt, wie zufolge der Lage des Punktes B_0 leicht bewiesen werden kann, symmetrisch zur Lage A_0A_1 bezüglich des Gestells A_0B_0. Es ist also $E_1A_1 = E_2A_2$. Würde man nun wie in Abb. 1 die angeführten Dreieckskonstruktionen durchführen, so würde B_{02} mit B_0 als Punktlagenreduktion zusammenfallen, d. h. aber, der Punkt B_0 ist der Pol P_{12}, um den sich die Koppelebene AB von der Lage A_1B_1 in die Lage A_2B_2 dreht. Die Gelenkpunktlage B_1 kann beliebig auf der Geraden B_0P_1 angenommen werden, und man hat damit im Gegensatz zu Abb. 1 unendlich viele Möglichkeiten für dessen Lage und kann somit das Getriebe den Platzverhältnissen anpassen oder z. B. auch günstige Übertragungswinkel erreichen.

In Abb. 3 sollen zunächst gegeben sein die beiden Punktlagen E_1 und E_2 und in beiden Punkten die Tangenten t_1 und t_2. Man wählt den Punkt B_0 wieder auf der Mittelsenkrechten der Strecke $E_1 E_2$, oder m. a. W. man zeichnet mit $E_1 E_2$ als Grundlinie ein beliebiges, gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenpunkt B_0 und dem Spitzenwinkel ψ_{12}. Es liegen auch hier gemäß der Wahl des Punktes B_0 die Kurbellagen $A_0 A_1$ und $A_0 A_2$ symmetrisch zum Gestell $A_0 B_0$, und die Geraden $B_0 A_1$ und $B_0 A_2$ schließen mit diesem beide den Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ ein. Der Pol P_1 liegt auf der Geraden $A_0 A_1$ und der Pol P_2 auf der Geraden $A_0 A_2$, und es ist wegen der angegebenen Symmetrie $\sphericalangle B_0 A_1 P_1 = \sphericalangle B_0 A_2 P_2 = \delta$. Bringt man nun durch Drehung um B_0 und um den Winkel ψ_{12} die Strecke $P_2 A_2$ in die Relativlage $P_{2.1} A_{2.1}$ (wobei $A_{2.1}$ als Punktlagenreduktion mit A_1 zusammenfällt), so liegt der Punkt $P_{2.1}$ auf der Geraden $P_1 B_0$, und der Punkt A_1 kann nur so gewählt werden, daß $\sphericalangle P_1 A_1 B_0 = \sphericalangle P_{2.1} A_1 B_0 = \delta$ ist, daß also $P_{2.1} B_0$ und $P_1 B_0$ von ihm aus gesehen unter gleichem Winkel erscheinen. Diese Bedingung wird, wie man beweisen kann, von allen Punkten A_1 erfüllt, die auf einem Kreis k_{12} liegen (Abb. 4) mit dem Durchmesser $B_0 B_a$, wobei B_a der vierte harmonische Punkt zu den Punkten $P_{2.1}$, B_0, P_1 ist. Man kann also in Abb. 4 den Punkt B_a in bekannter Weise konstruieren, indem man auf einer beliebigen Geraden durch P_1 die Streckengleichheit $P_1 S = P_1 T$ zustande bringt, den Punkt U als Schnittpunkt von $B_0 T$ mit der Parallelen durch $P_{2.1}$ zu ST ermittelt und dann den Punkt B_a als Schnittpunkt der Geraden $P_1 B_0$ und US erhält. Im weiteren Verlauf der Gesamtkonstruktion wählt man auf dem Kreis k_{12} einen Punkt A_1 nach praktischen Gesichtspunkten aus (Abb. 4) und trägt an diesem Strahl $B_0 X_1$ den Strahl $B_0 X_0$ im Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ an. Der Schnittpunkt von $B_0 X_0$ mit $P_1 A_1$ ergibt den Gestellpunkt A_0. Man kann selbstverständlich auch den Punkt A_0 beliebig annehmen und erhält dann den Punkt A_1 und wie vorher auch gleichzeitig die Kurbellänge $A_0 A_1$. Vorausgesetzt ist hierbei noch, daß in Abb. 3 die Pole P_1 und $P_{2.1}$ auf den Normalen n_1 und $n_{2.1}$ beliebig so angenommen wurden, daß sie mit B_0 auf einer Geraden liegen, wobei die Normale $n_{2.1}$ aus der Verdrehung von n_2 um B_0 und um den Winkel ψ_{12} von E_2 nach E_1 entstanden ist. Die in Abb. 3 noch fehlende Gelenkpunktlage B_1 kann man beliebig auf der Geraden $P_1 B_0$ annehmen.

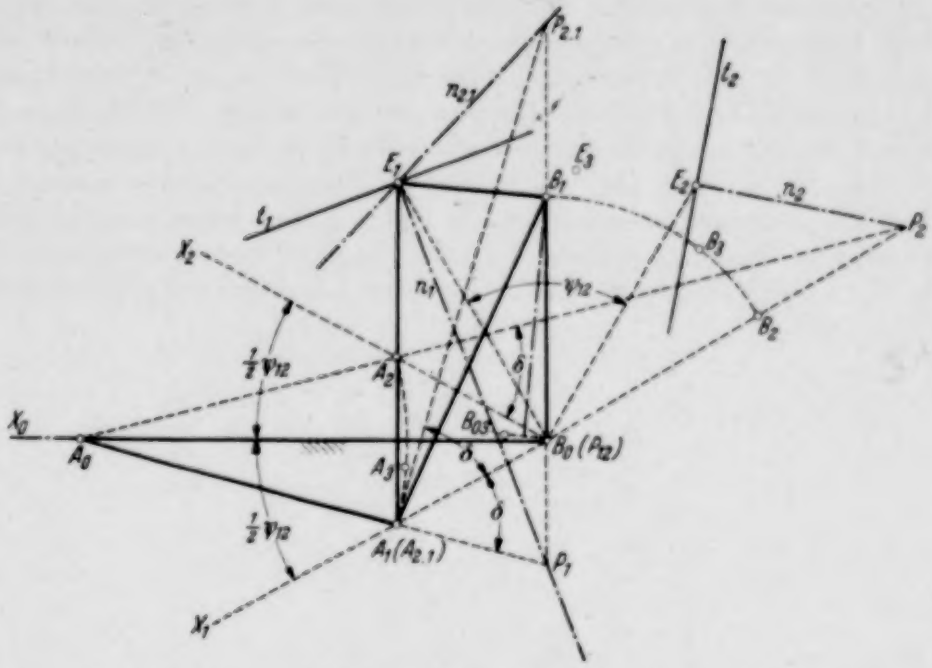


Abb. 3. Gegeben zwei (drei) Punktlagen und zwei Tangenten, Gestellpunkt B_0 auf der Mittelsenkrechten von $E_1 E_2$.

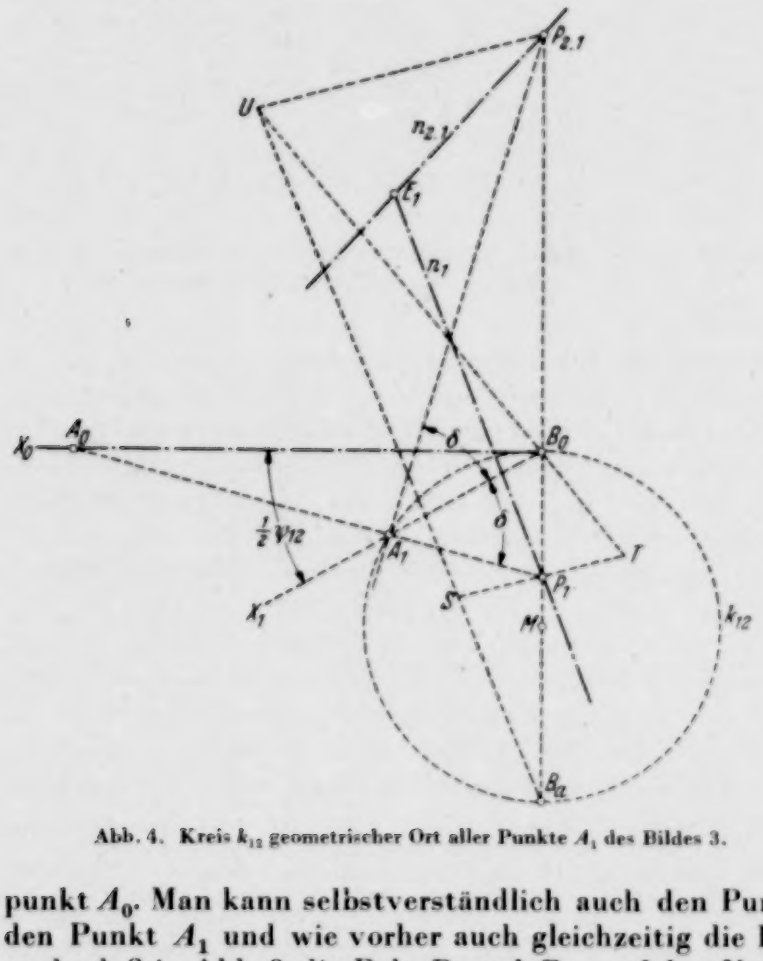


Abb. 4. Kreis k_{12} geometrischer Ort aller Punkte A_1 des Bildes 3.

Ist außer den beiden Punktlagen E_1 und E_2 und Tangenten t_1 und t_2 noch eine dritte Punktlage E_3 gegeben, so hat die Konstruktion den gleichen Verlauf. Man ermittelt dann (Abb. 3) nur den Punkt A_3 als Schnittpunkt des Kurbelkreises um A_0 mit A_0A_1 als Halbmesser mit dem Kreisbogen um E_3 und E_1A_1 als Halbmesser und macht $\Delta E_1A_1B_{03} = \Delta E_3A_3B_0$. Die Mittelsenkrechte auf B_0B_{03} schneidet dann die Gerade P_1B_0 in der einzig möglichen Gelenkpunktlage B_1.

In Abb. 3 waren die Pole P_1 und $P_{2.1}$ auf den Normalen n_1 und $n_{2.1}$ beliebig auf einer Geraden durch B_0 angenommen worden. In vielen Fällen ist es nun von besonderem Wert, die Sonderfälle kennen zu lernen, die meist zu vereinfachten Konstruktionen führen. So entartet der Kreis k_{12} z. B. in eine Gerade k_{12} (Abb. 5), wenn der Punkt B_0 Mittelpunkt der Strecke $P_1P_{2.1}$ ist. Der

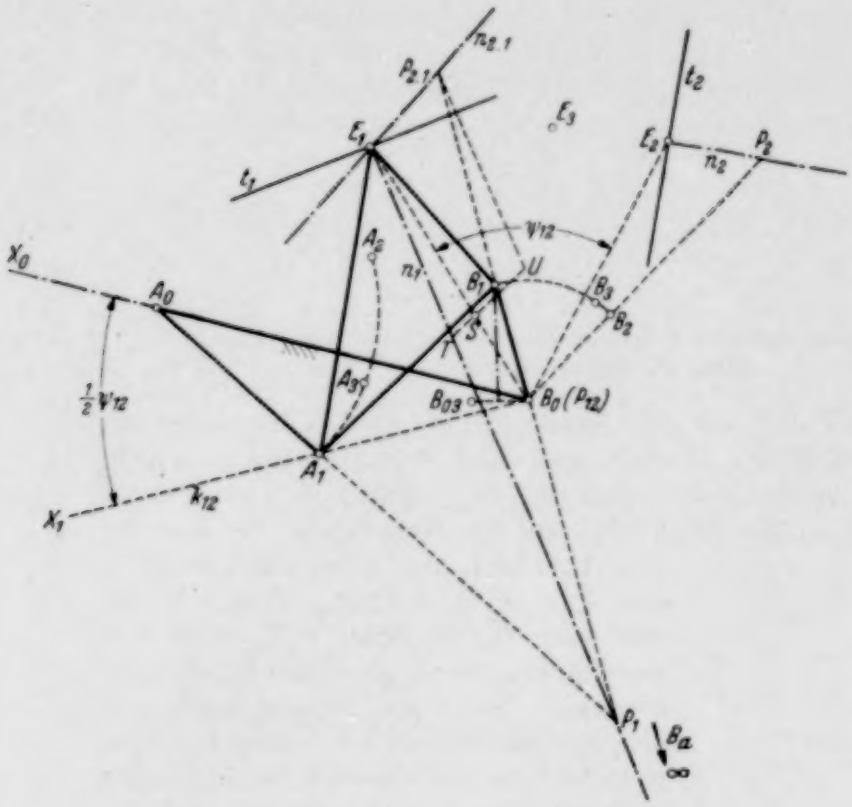


Abb. 5. Aufgabenstellung wie Abb. 3. Entartung des Kreises k_{12} in eine Gerade, wenn B_0 Mittelpunkt von $P_1P_{2.1}$.

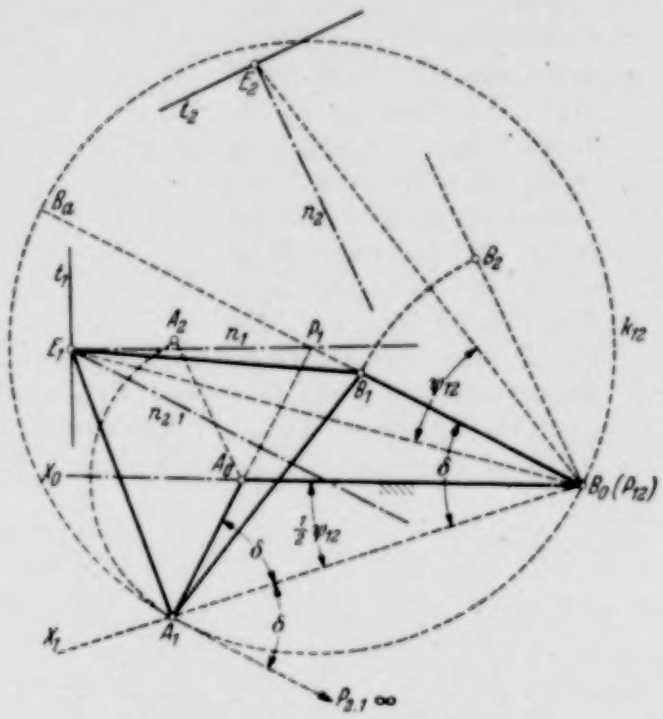


Abb. 6. Aufgabenstellung wie Abb. 3. Halbmesser P_1B_0 des Kreises k_{12}, wenn der Pol P_2 im Unendlichen liegt.

vierte harmonische Punkt B_a liegt dann nämlich im Unendlichen, der Durchmesser B_0B_a des Kreises k_{12} ist also auch unendlich groß und dieser Kreis ist die Gerade k_{12}, die in B_0 senkrecht auf $P_1P_{2.1}$ steht. Wenn in Abb. 5 wieder zwei bzw. drei E-Punktlagen und zwei Tangenten t_1 und t_2 gegeben sind, wählt man den Punkt B_0 als Spitzenpunkt im beliebigen, gleichschenkligen Dreieck mit der Grundlinie E_1E_2 und dem Spitzenwinkel ψ_{12}. Die durch die Tangente t_2 ebenfalls gegebene Normale n_2 verdreht man um B_0 und um den Winkel ψ_{12}, bis E_2 zur Deckung mit E_1 kommt. Es sollen nun die Pole P_1 und $P_{2.1}$ auf n_1 und $n_{2.1}$ so gewählt werden, daß B_0 der Mittelpunkt der Strecke $P_1P_{2.1}$ ist. Es muß also die Strecke B_0E_1 Mittellinie im Dreieck $P_1E_1P_{2.1}$ sein. Eine genaue Bestimmung der beiden Pole ist dann möglich unter Zuhilfenahme des Satzes, daß die Mittellinien im beliebigen Dreieck sich im Verhältnis 2:1, von den Ecken aus gerechnet, schneiden. Man macht also $E_1S = 2B_0S$, zieht eine beliebige Gerade durch S und macht $US = 2ST$, wenn T der Schnittpunkt dieser Geraden mit P_1E_1 ist. Die Parallele durch U zu P_1E_1 schneidet dann $n_{2.1}$ in $P_{2.1}$. Die Senkrechte k_{12} in B_0 ist also der geometrische Ort aller Punkte A_1. Zeichnet man wieder den Strahl B_0X_0, der mit k_{12} (B_0X_1) den Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ einschließt, so schneiden alle Geraden durch P_1 die zugehörigen Punkte A_0 und A_1 ab. Die weitere Konstruktion auch für den Punkt E_3 ist nach Ermittlung von A_3 und B_{03} die gleiche wie in Abb. 3.

Ein weiterer Sonderfall tritt ein, wenn man bei der gleichen Aufgabenstellung einen der beiden Pole als im Unendlichen liegend annimmt, d. h. in einer solchen Getriebestellung werden Kurbel und Schwinge einander parallel. In einem solchen Falle muß die Strecke B_0P_1 parallel zu $n_{2.1}$ gezeichnet werden (Abb. 6). Der Pol P_1 ergibt sich damit als Schnittpunkt der Parallelen durch den wie bisher angenommenen Punkt B_0 mit der Normalen n_1. Da einer der vier harmonischen

Punkte, nämlich $P_{2.1}$, unendlich fern liegt, muß der ihm entsprechende Punkt P_1 Mittelpunkt der Strecke $B_0 B_a$ sein. Der Kreis k_{12} hat damit den Mittelpunkt P_1 und den Halbmesser $P_1 B_0$. Die Konstruktion des Gelenkvierecks kann nun in Abb. 6 wie in Abb. 3 mit den den Winkel $\frac{1}{2}\psi_{12}$ bildenden Strahlen $B_0 X_1$ und $B_0 X_0$ weitergeführt werden. Jeder auf dem Kreis k_{12} angenommene Punkt A_1 schließt mit der Verbindungsgeraden $A_1 P_1$ den gleichen Winkel δ mit $B_0 A_1$ ein, wie die Strecke $B_0 A_1$ mit der Parallelen durch A_1 zu $n_{2.1}$.

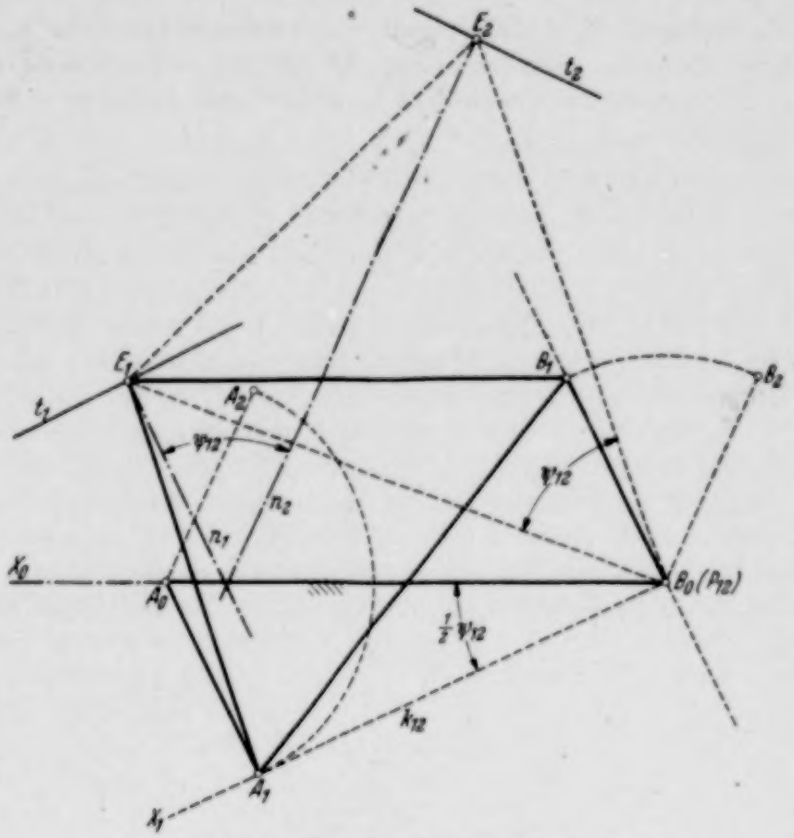


Abb. 7. Aufgabenstellung wie Abb. 3. Beide Pole P_1 und P_2 liegen im Unendlichen.

Es interessiert natürlich nun auch der besondere Fall, wenn für die gleichen Bedingungen beide Pole P_1 und P_2 unendlich fern liegen, wenn also in beiden entsprechenden Getriebestellungen Kurbel und Schwinge des Gelenkvierecks jeweils einander parallel sind. Es sollen wieder (Abb. 7) die beiden Punktlagen E_1 und E_2 mit den Tangenten t_1 und t_2 gegeben sein. Wenn die beiden Tangenten t_1 und t_2 den Winkel ψ_{12} einschließen, zeichnet man über $E_1 E_2$ als Grundlinie das gleichschenklige Dreieck mit dem Spitzenpunkt B_0 und diesem Spitzenwinkel ψ_{12}. Da der Pol P_1 im Unendlichen liegen soll, muß man die Schwingenlage $B_0 B_1$ parallel zu n_1 aufzeichnen. Zufolge der unendlich fernen Lage auch des Poles P_2, bzw. $P_{2.1}$, wird der Kreis k_{12} durch die Gerade k_{12} ($B_0 X_1$), in B_0 senkrecht auf $B_0 B_1$ stehend, dargestellt. Sie ist also der geometrische Ort aller Punkte A_1. Alle Kurbellagen $A_0 A_1$ liegen parallel zu n_1 und alle Kurbellagen $A_0 A_2$ parallel zu n_2, so daß damit eine einfache Konstruktion aller möglichen Gelenkvierecke gegeben ist. Man braucht in Abb. 7 nur eine beliebige Kurbellage $A_0 A_1$ zwischen den Strahlen $B_0 X_0$ und $B_0 X_1$ in paralleler Lage zu n_1 anzunehmen. Es erfüllt dann auch jeder beliebige Punkt B_1 auf der Geraden $B_0 B_1$ die Bedingungen der Aufgabe.

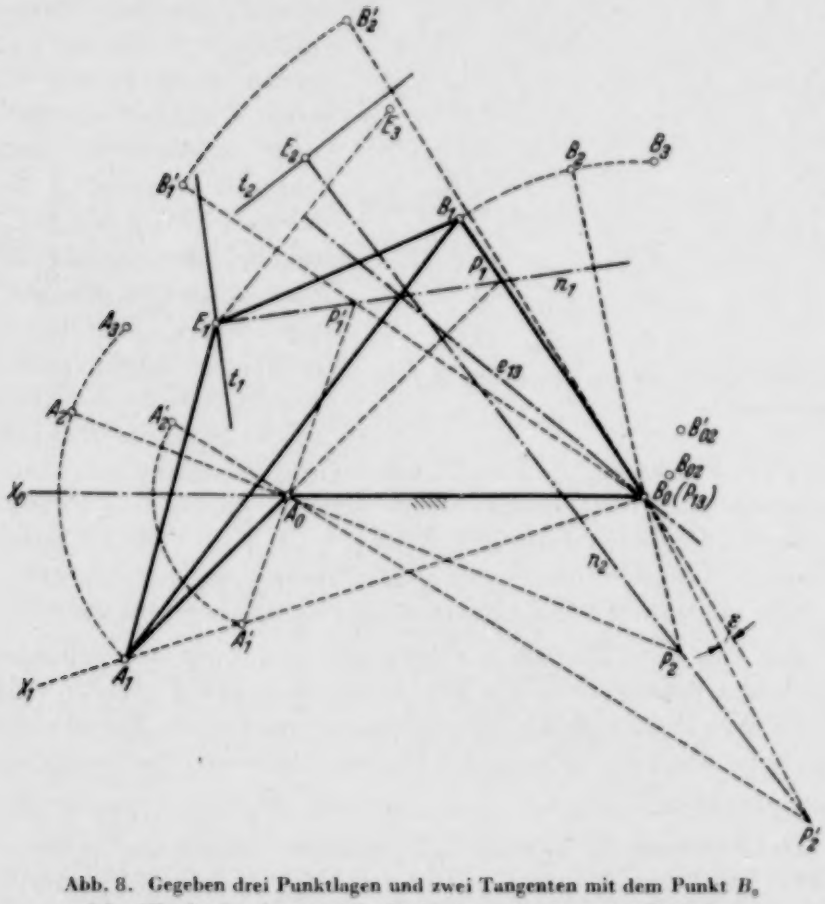


Abb. 8. Gegeben drei Punktlagen und zwei Tangenten mit dem Punkt B_0 auf der Mittelsenkrechten auf der Verbindungsstrecke zweier Punktlagen.

Bei drei gegebenen Punktlagen E_1 bis E_3 und zwei ebenfalls gegebenen Tangenten ist es praktisch nicht immer möglich, den Punkt B_0 wie bisher auf der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke der beiden Punktlagen anzunehmen, in denen auch die Tangenten vorgeschrieben sind. So sollen in Abb. 8 die drei

Punktlagen E_1 bis E_3 und die beiden Tangenten t_1 und t_2 gegeben sein. Der Punkt B_0 liege beliebig, um zu einer Punktlagenreduktion zu kommen, auf der Mittelsenkrechten e_{13} der Strecke E_1E_3. Man zeichnet das beliebig in der Zeichenebene mit B_0 als Ursprung liegende Strahlenpaar $B_0X_0 - B_0X_1$, das den Winkel $X_0B_0X_1 = \frac{1}{2}\psi_{13}$ einschließt, wenn $\psi_{13} = \sphericalangle E_1B_0E_3$ ist. Man kann sich den Gestellpunkt A_0 auf B_0X_0 noch vorgeben und zeichnet eine beliebige Kurbellage A_0A_1' mit A_1' auf B_0X_1 und erhält den Pol P_1' als Schnittpunkt von n_1 mit A_0A_1'. Der Punkt A_2' ergibt sich als Schnittpunkt des Kurbelkreises um A_0 mit A_0A_1' als Halbmesser mit dem Kreisbogen um E_2 mit E_1A_1' als Halbmesser. Nun macht man: $\Delta E_1A_1'B_{02}' = \Delta E_2A_2'B_0$ und bringt die Mittelsenkrechte auf B_0B_{02}' zum Schnitt B_1' mit der Geraden B_0P_1'. Die Gelenkpunktlage B_2' erhält man, wenn man den Kreis um B_0 mit B_0B_1' als Halbmesser zum Schnitt bringt mit dem Kreisbogen um A_2' und mit $A_1'B_1'$ als Halbmesser. Ermittelt man nun den Pol P_2' als Schnittpunkt von A_0A_2' mit der gegebenen Normalen n_2, so entsteht im allgemeinen ein Winkel ε zwischen den Strecken $P_2'B_0$ und B_0B_2'. Die Aufgabe, nämlich die gegebene Lage von t_2 und n_2, ist aber nur erfüllt, wenn dieser Winkel $\varepsilon = 0$ ist. Man kann also die angegebene Konstruktion mit verschiedenen Kurbellagen A_0A_1' solange wiederholen, bis $\varepsilon = 0$ wird. Es empfiehlt sich dabei die Auftragung der Winkel ε in einem Koordinatensystem als Ordinaten über beispielsweise den Strecken B_0A_1' als Abszissen. In Abb. 8 ist für die Kurbellage A_0A_1 die Aufgabe erfüllt, da der Pol P_2 auf der Strecke B_0B_2 liegt. Demzufolge ist $\varepsilon = 0$.

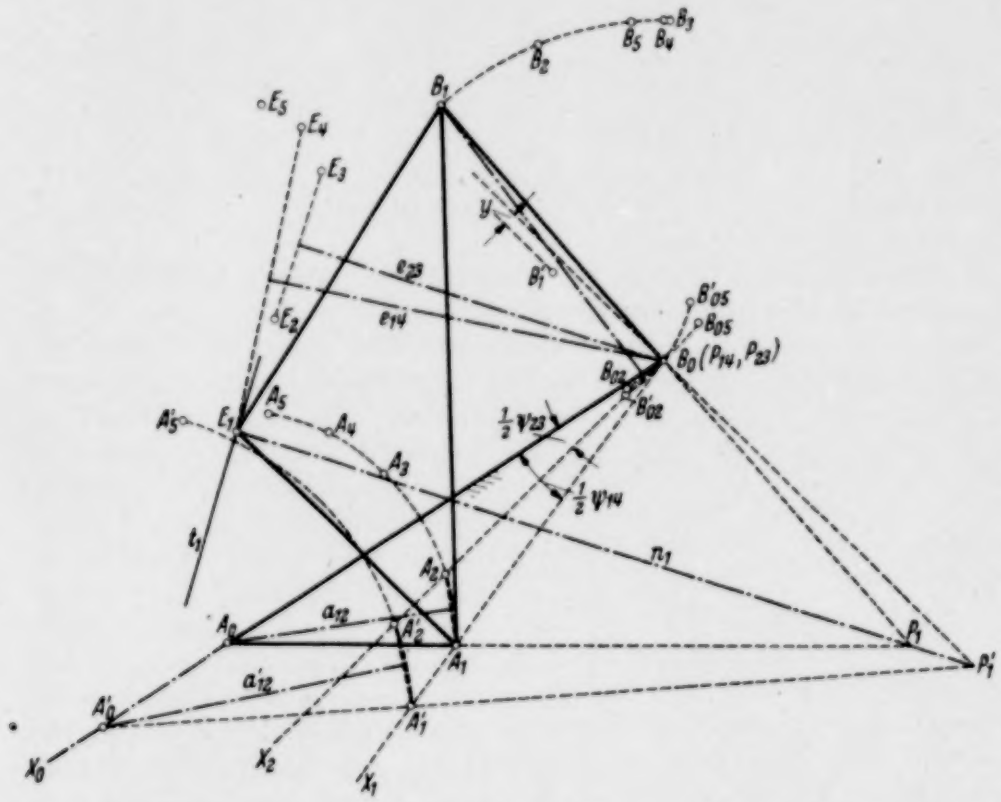


Abb. 9. Gegeben vier bzw. fünf Punktlagen und eine Tangente mit dem Gestellpunkt B_0 als Punktlagenreduktion.

Eine Kombination des Verfahrens nach Abb. 3 und desjenigen nach Abb. 8 ermöglicht die Erfüllung von drei Punktlagen und drei Tangenten. Man wählt dann den Punkt B_0 immer noch beliebig auf einer der Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke zweier Punktlagen und sucht auf dem entsprechenden Kreis k_{12} einen Punkt A_1', für welchen nach den Maßnahmen von Abb. 8 der Winkel ε Null wird. Da hierbei der Punkt B_0 immer noch willkürlich auf seiner Mittelsenkrechten angenommen wurde, ist es denkbar, die Lage dieses Punktes so lange zu verändern, bis noch eine vierte Punktlage E_4 durchlaufen wird. Es ergibt sich dann noch ein Punkt B_{04}, so daß beispielsweise der Mittelpunkt eines Kreises durch drei Punkte B_0, B_{02}, B_{04} auf der Geraden B_0P_1 liegt und gleichzeitig der Winkel $\varepsilon = 0$ wird. Damit ist es also, wie bereits eingangs behauptet wurde, möglich, insgesamt sieben Bedingungen zu erfüllen, wenn je eine Tangente als Ersatz für eine unendlich benachbarte Punktlage angesehen wird.

In Abb. 9 soll gezeigt werden, wie für vier bzw. fünf Punktlagen und eine Tangente mühelos ein Gelenkviereck konstruiert werden kann. Zunächst sollen nur die Punktlagen E_1 bis E_4 und die Tangente t_1 gegeben sein. Man wählt den Punkt B_0 als Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten e_{14} und e_{23} auf E_1E_4 und E_2E_3 und zeichnet beliebig in der Zeichenebene das Strahlenbüschel $B_0X_0 - B_0X_1 - B_0X_2$ mit den Winkeln $X_0B_0X_1 = \frac{1}{2}\psi_{14}$ und $X_0B_0X_2 = \frac{1}{2}\psi_{23}$, wobei $\sphericalangle E_1B_0E_4 = \psi_{14}$ und $\sphericalangle E_2B_0E_3 = \psi_{23}$. Die Strahlen B_0X_1 und B_0X_2 müssen so zu dem X_0-Strahl liegen wie die Punkte E_1 und E_2 zu den Punkten E_4 und E_3. Dann schlägt man um E_1 und E_2 mit beliebigem, aber gleich großem Halbmesser Kreisbögen, die die Strahlen B_0X_1 und B_0X_2

in A_1 und A_2 schneiden. Die Mittelsenkrechte a_{12} auf $A_1 A_2$ schneidet $B_0 X_0$ in A_0 und die Gerade $A_0 A_1$ die gegebene Normale n_1 in P_1. Macht man $\Delta E_1 B_{02} A_1 = \Delta E_2 B_0 A_2$, so schneidet die Mittelsenkrechte auf $B_0 B_{02}$ die Gerade $B_0 P_1$ in der Gelenkpunktlage B_1, womit alle Abmessungen des Gelenkvierecks bekannt sind.

Sind fünf Punktlagen E_1 bis E_5 und eine Tangente t_1 gegeben (Abb. 9), so verfährt man zunächst in der gleichen Weise bis zu dem X-Strahlenbüschel, bestimmt auch so die Punkte A_1', A_2' und A_0' sowie den Pol P_1'. Auf dem Kreis um A_0' mit $A_0' A_1'$ als Halbmesser findet man A_5' als Schnittpunkt dieses Kreises mit dem Kreisbogen um E_5 und $E_1 A_1'$ als Halbmesser. Nun macht man: $\Delta E_1 B_{02}' A_1' = \Delta E_2 B_0 A_2'$ und $\Delta E_1 B_{05}' A_1' = \Delta E_5 B_0 A_5'$ und findet B_1' als Mittelpunkt des Kreises durch die drei Punkte B_0, B_{02}', B_{05}'. Dieser Mittelpunkt müßte auf der Geraden $P_1' B_0$ liegen, was aber im allgemeinen nicht zutrifft. Es ist deshalb zweckmäßig, die beschriebene Konstruktion für verschiedene Längen $E_1 A_1'$ zu wiederholen und den senkrechten Abstand y des Punktes B_1' von $P_1' B_0$ in einem Schaubild mit den Strecken $E_1 A_1'$ als Abszissen als Kurve aufzutragen. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Abszisse ergeben dann Lösungen der gestellten Aufgabe.

In Abb. 9 liegen gemäß der Wahl des Punktes B_0 die Kurbellagen $A_0 A_1$ und $A_0 A_4$ sowie $A_0 A_2$ und $A_0 A_3$ symmetrisch zum Gestell. Der Punkt B_0 ist gleichzeitig der Pol P_{14} und P_{23} der Koppelebene EAB. Da die Lage des X-Strahlenbüschels noch beliebig angenommen wurde, ist es möglich, beispielsweise noch eine sechste Punktlage E_6 zu erfüllen, so daß auch hier insgesamt bis zu sieben Bedingungen gestellt werden können.

In Abb. 10 sollen vier Punktlagen E_1 bis E_4 und zwei Tangenten t_1 und t_4 gegeben sein. Man wählt den Punkt B_0 wieder als Schnittpunkt der beiden Mittelsenkrechten e_{14} und e_{23} auf $E_1 E_4$ und $E_2 E_3$. Die gegebene Normale n_4 verdreht man um B_0 und um den Winkel $\psi_{14} = \sphericalangle E_1 B_0 E_4$, bis der Punkt E_4 nach E_1 kommt und erhält die Lage $n_{4.1}$. Auf n_1 und $n_{4.1}$ nimmt man beliebig die beiden Pole P_1 und $P_{4.1}$ so an, daß auf ihrer Verbindung der Punkt B_0 liegt. Nach der Konstruktion von Abb. 4 zeichnet man mit Hilfe des vierten harmonischen Punktes B_a den Kreis k_{14} als geometrischen Ort aller Kurbelpunktlagen A_1. Auf k_{14} nimmt man einen beliebigen Punkt A_1' an und zeichnet das X'-Strahlenbüschel mit den Winkeln $X_0' B_0 X_1' = \frac{1}{2}\psi_{14}$ und $X_0' B_0 X_2' = \frac{1}{2}\psi_{23}$ mit $\sphericalangle E_1 B_0 E_4 = \psi_{14}$ und $\sphericalangle E_2 B_0 E_3 = \psi_{23}$. Dann schlägt man um E_2 den Kreisbogen mit $E_1 A_1'$ als Halbmesser, der den Strahl $B_0 X_2'$ in A_2' schneidet. Die Mittelsenkrechte auf $A_1' A_2'$ schneidet $B_0 X_0'$ in A_a. Es müßte nun die Verbindungsgerade $A_1' A_a$ durch den Pol P_1 gehen. In Wirklichkeit aber schneidet die Gerade $A_1' P_1$ den Strahl $B_0 X_0'$ in A_0'. Man kann also auch hier wieder zeichnerische Interpolationen durchführen, indem man den Punkt A_1' auf dem Kreis k_{14} so lange wandern läßt, bis die Strecke $A_0' A_a$ Null wird. Hat man einen Punkt A_1 gefunden, für den $A_0' A_a = 0$ ist, so macht man $\Delta E_1 B_{02} A_1 = \Delta E_2 B_0 A_2$ und bringt die Mittelsenkrechte auf $B_0 B_{02}$ zum Schnitt B_1 mit der Geraden $B_0 P_1$, womit die Abmessungen des Gelenkvierecks eindeutig bestimmt sind.

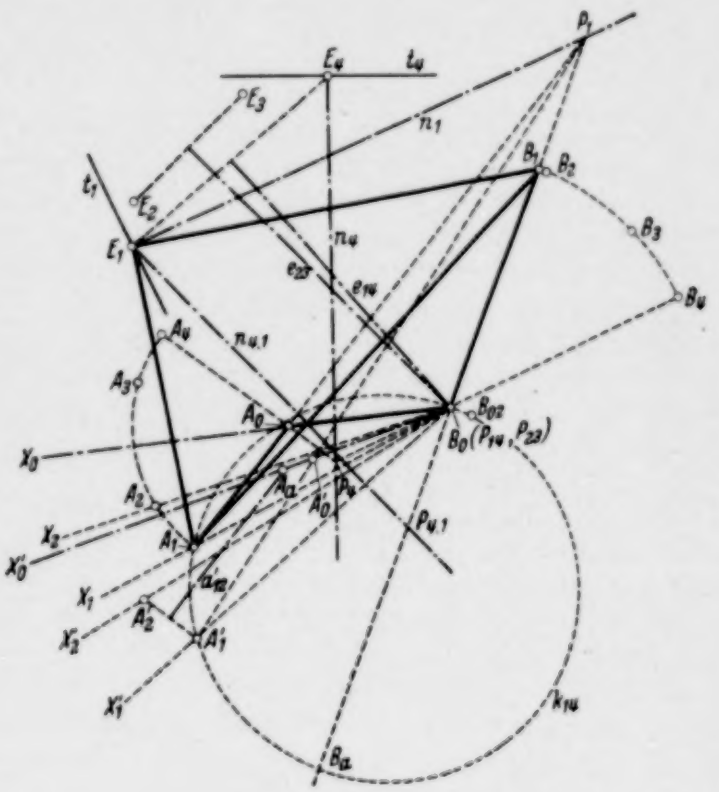


Abb. 10. Gegeben vier Punktlagen und zwei Tangenten mit dem Gestellpunkt B_0 als Punktlagenreduktion.

Gemäß der Wahl des Punktes B_0 stellt dieser Punkt gleichzeitig den Pol P_{14} und P_{23} dar, und die Kurbellagen $A_0 A_1$ und $A_0 A_4$ sowie $A_0 A_2$ und $A_0 A_3$ liegen symmetrisch zum Gestell $A_0 B_0$. Die Aufgabenstellung von Abb. 10 läßt sich ebenfalls bis auf sieben Bedingungen, nämlich fünf Punktlagen und zwei Tangenten erweitern, da ja die Pole P_1 und $P_{4.1}$ immer noch beliebig angenommen worden waren. Man zeichnet also für verschiedene Lagen P_1' und $P_{4.1}'$ auf n_1 und $n_{4.1}$ die Kreise k_{14} und bestimmt für jeden dieser Kreise den Punkt A_1, für welchen $A_0' A_a = 0$ ist.

In entsprechender Weise ermittelt man dann den Punkt B_{05} für die zusätzliche, gegebene Punktlage E_5. Der Mittelpunkt des Kreises durch die drei Punkte B_0, B_{02}, B_{05} muß dann auf der Geraden $B_0 P_1$ liegen.

4. Punktlagenreduktion eines beweglichen Gelenkpunktes. Die bisher gezeigten Konstruktionen fußten sämtlich auf der Wahl eines Gestellpunktes so, daß seine Lage zu einer oder mehreren Punktlagenreduktionen führte. Es bietet sich aber auch die willkommene Möglichkeit, einen beweglichen Gelenkpunkt des Gelenkvierecks in entsprechender Form auszuwählen. Dieser Punkt ist dann gleichzeitig in verschiedenen Lagen der Pol verschiedener Koppellagen. Während bisher einzelne Kurbellagen paarweise symmetrisch zum Gestell lagen, kommt nunmehr eine Kurbellagensymmetrie bezüglich der Koppel des Gelenkvierecks zustande.

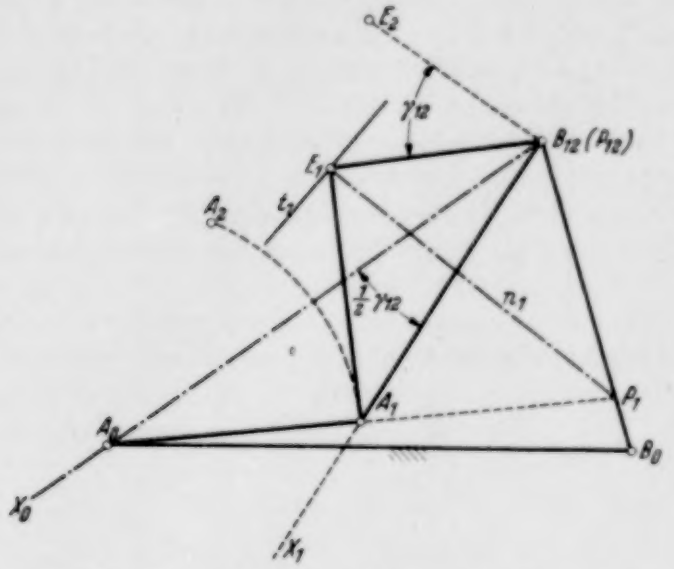


Abb. 11. Gegeben zwei Punktlagen und eine Tangente, Gelenkpunkt B_{12} auf der Mittelsenkrechten von $E_1 E_2$.

In Abb. 11 sind zwei Punktlagen E_1 und E_2 und eine Tangente t_1 gegeben. Man zeichnet über $E_1 E_2$ als Grundlinie ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck mit dem Spitzenpunkt B_{12} und mit dem Spitzenwinkel γ_{12}. Dann zeichnet man ein beliebig liegendes Strahlenpaar mit dem Ursprung B_{12} und dem Winkel $X_0 B_{12} X_1 = \frac{1}{2}\gamma_{12}$. Nun kann man den praktischen Belangen entsprechend eine Kurbellänge $A_0 A_1$ zwischen den X-Strahlen festlegen, deren Verlängerung die gegebene Normale n_1 in P_1 schneidet. Auf $B_{12} P_1$ gibt es dann unendlich viele Punkte B_0. Wie bereits erwähnt, liegen die beiden Kurbellagen $A_0 A_1$ und $A_0 A_2$ des so konstruierten Gelenkvierecks symmetrisch zur Koppel AB. In beiden Getriebestellungen 1 und 2 nimmt die Schwinge $B_0 B$ die gleiche Lage $B_0 B_{12}$ ein, und der Punkt B_{12} ist gleichzeitig der Pol P_{12} der Koppel ABE.

Bei zwei gegebenen Punktlagen und zwei Tangenten kann man nach Abb. 12 verfahren. Wenn E_1, E_2, t_1, t_2 gegeben sind, wählt man B_{12} wieder beliebig als Spitzenpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks über $E_1 E_2$. Dann nimmt man die Pole P_1 und P_2 auf n_1 und n_2 beliebig so an, daß der Punkt B_{12} auf ihrer Verbindungsgeraden liegt. Zu den drei Punkten P_1, P_2, B_{12} ermittelt man den vierten harmonischen Punkt B_a mit Hilfe der Parallelen TS und $P_2 U$ und zeichnet mit $B_{12} B_a$ als Durchmesser den Kreis k_{12}, der als geometrischer Ort für alle Gestellpunktlagen A_0 dient. Zeichnet man nun mit B_{12} als Ursprung ein beliebig liegendes Strahlenpaar $B_{12} X_0 - B_{12} X_1$ mit einem eingeschlossenen Winkel $\frac{1}{2}\gamma_{12}$, so braucht man nur die Gerade $P_1 A_0$ zu ziehen, wenn A_0 der Schnittpunkt von $B_{12} X_0$ mit k_{12} ist, um die entsprechende Kurbellänge $A_0 A_1$ durch den Schnittpunkt A_1 von $P_1 A_0$ mit

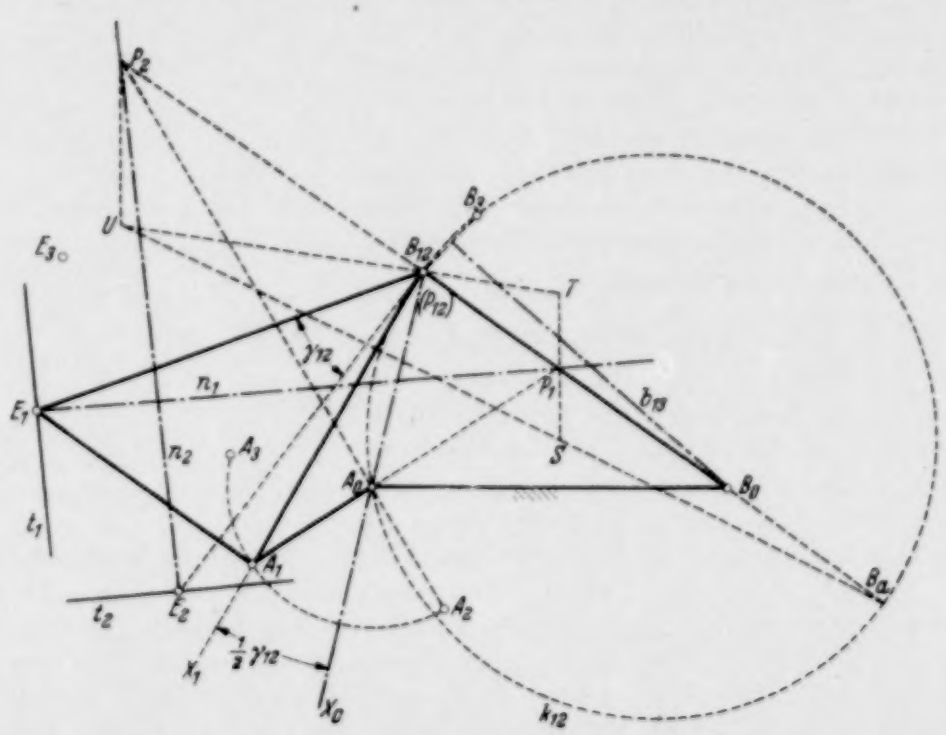


Abb. 12. Gegeben zwei (drei) Punktlagen und zwei Tangenten. Gelenkpunkt B_{12} auf der Mittelsenkrechten von $E_1 E_2$.

$B_{12}X_1$ zu erhalten. Den Gestellpunkt B_0 kann man beliebig auf $B_{12}P_1$ annehmen und hat so alle Abmessungen des verlangten Gelenkvierecks.

Ist noch eine dritte Punktlage E_3 gegeben, so ist die Konstruktion die gleiche. Man braucht zuletzt nur noch den Punkt A_3 auf dem Kurbelkreis mit A_0 als Mittelpunkt und A_0A_1 als Halbmesser als Schnittpunkt mit dem Kreisbogen um E_3 und E_1A_1 als Halbmesser zu bestimmen. Dann macht man: $\Delta E_3A_3B_3 = \Delta E_1A_1B_{12}$ und findet den Punkt B_0 als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten b_{13} auf $B_{12}B_3$ mit $B_{12}P_1$.

Es können auch hier die bereits erwähnten Sonderfälle des Kreises k_{12} in der gleichen Weise herbeigeführt werden, wobei hier der Punkt A_0 immer auf diesem Kreis auszuwählen ist.

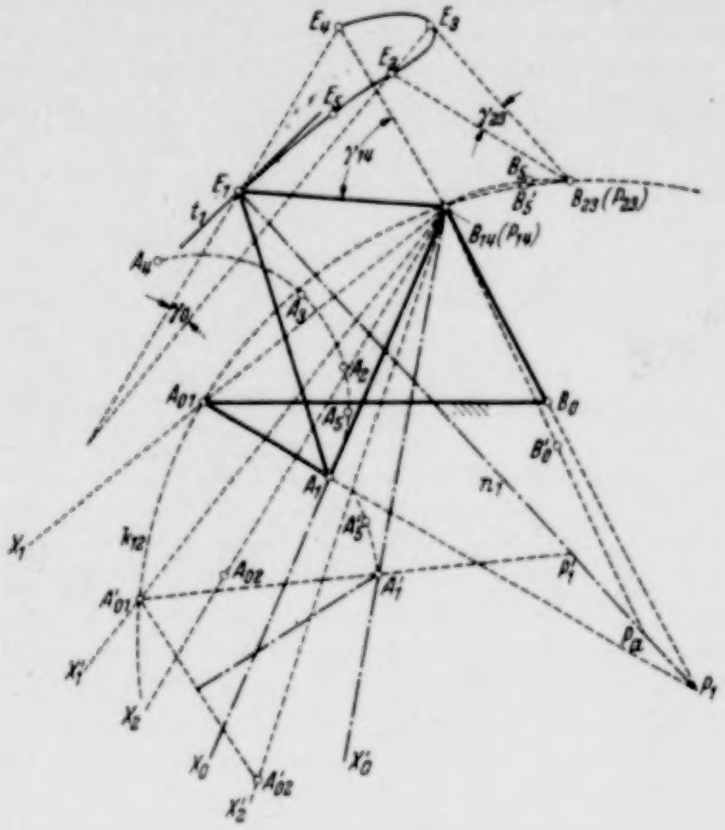


Abb. 13. Gegeben vier bzw. fünf Punktlagen und eine Tangente mit dem Gelenkpunkt B_{14} als Punktlagenreduktion.

In Abb. 13 sollen zunächst wieder vier Punktlagen E_1 bis E_4 und eine Tangente t_1 gegeben sein. Man zeichnet über E_1E_4 und E_2E_3 (das Punktlagenpaar E_2-E_3 muß beim Bewegen des Koppelpunktes E zwischen dem Punktlagenpaar E_1-E_4 liegen) als Grundlinien die gleichschenkligen Dreiecke mit immer gleicher, aber beliebiger Seitenlänge mit den Spitzenpunkten B_{14} und B_{23} und den Spitzenwinkeln γ_{14} und γ_{23}. Wenn die Strecken E_1E_4 und E_2E_3 sich unter dem Winkel γ_0 schneiden, zeichnet man über $B_{14}B_{23}$ den Kreis k_{12}, der den Winkel γ_0 als Umfangswinkel faßt. Auf diesem Kreis k_{12} nimmt man einen beliebigen Punkt A_{01} an und konstruiert ein Strahlenbüschel mit dem Ursprung B_{14} und den Winkeln $\sphericalangle X_1B_{14}X_0 = \frac{1}{2}\gamma_{14}$ und $\sphericalangle X_2B_{14}X_0 = \frac{1}{2}\gamma_{23}$, wobei der X_1- und X_2-Strahl zu dem X_0-Strahl in umgekehrtem Sinne liegen muß wie die Punkte E_1 und E_2 zu den Punkten E_4 und E_3. Um E_1 schlägt man einen Kreisbogen mit E_2A_{01} als Halbmesser, der den Strahl $B_{14}X_2$ in A_{02} schneidet. Die Mittelsenkrechte auf $A_{01}A_1$ wiederum schneidet den Strahl $B_{14}X_0$ in A_1. Verlängert man nun die Gerade $A_{01}A_1$ bis zum Schnitt P_1 mit der gegebenen Normalen n_1, so braucht man nur noch die Mittelsenkrechte auf $B_{14}B_{23}$ zum Schnitt B_0 zu bringen mit der Strecke P_1B_{14} und hat damit alle Abmessungen eines von unendlich vielen die Aufgabe erfüllenden Gelenkvierecks bestimmt.

Ist aber außer den vier Punktlagen und der einen Tangente noch eine fünfte Punktlage E_5 gegeben, so muß man zeichnerische Interpolationen zu Hilfe nehmen. Man verfährt in Abb. 13 zunächst wie bereits beschrieben. Es ist also der Kreis k_{12} als Umfangskreis des Winkels γ_0 bekannt. Auf ihm nimmt man beliebige Punkt A'_{01} an und zeichnet dazu jeweils ein Strahlenbüschel $B_{14}X_1' - B_{14}X_2' - B_{14}X_0'$, das die Winkel $\frac{1}{2}\gamma_{14}$ und $\frac{1}{2}\gamma_{23}$ einschließt. Der Kreisbogen mit $E_2A'_{01}$ als Halbmesser schneidet den Strahl $B_{14}X_2'$ in A'_{02} und die Mittelsenkrechte auf $A'_{01}A'_{02}$ den Strahl $B_{14}X_0'$ in A_1'. Auf dem Kreis um A'_{01} durch A_1' bestimmt man den Punkt A_5', der von E_5 die Entfernung E_1A_1' hat. Macht man nun $\Delta E_5A_5'B_5' = \Delta E_1A_1'B_{14}$, so ergibt sich B_0' als Mittelpunkt des Kreises durch die drei Punkte B_{14}, B_5', B_{23}. Die Gerade $B_{14}B_0'$ schneidet die Normale n_1 in P_a, während die Gerade $A'_{01}A_1'$ dies in P_1' tut. Beide Gerade müßten sich aber im gleichen Punkt auf der Normalen n_1 schneiden, d. h. also, man muß den Punkt A'_{01} so lange auf k_{12} wandern lassen, bis die Entfernung $P_1'P_a$ Null wird.

Es leuchtet ein, daß die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen um eine Punktlage erhöht werden kann, da ja zu Beginn der Konstruktion die Seitenlänge $E_1B_{14} = E_2B_{23}$ noch beliebig groß angenommen wurde. Das würde zum Schluß bedeuten, daß ein Kreis durch vier Punkte B_{14}, B_{23}, B_5, B_6 mit dem Mittelpunkt B_0 zu zeichnen wäre, und die Gerade $B_{14}B_0$ sich mit der Geraden $A_{01}A_1$ auf der Normalen n_1 schneidet.

In Abb. 14 sollen gegeben sein vier Punktlagen E_1 bis E_4 und zwei Tangenten t_2 und t_3. Man zeichnet wieder über E_1E_4 und E_2E_3 als Grundlinien die gleichschenkligen Dreiecke mit den Spitzenpunkten B_{14} und B_{23} und den Spitzenwinkeln γ_{14} und γ_{23}. Wenn die Geraden E_1E_4 und E_2E_3 den Winkel γ_0 einschließen, ist k_{12} wieder der Kreis, der über $B_{23}B_{14}$ den Winkel γ_0 als Umfangswinkel faßt. Da die Normalen n_2 und n_3 gegeben sind, wählt man auf ihnen zunächst die Pole P_2' und P_3' auf einer Geraden durch B_{23} beliebig aus und ermittelt zu P_2', P_3' und B_{23} den vierten harmonischen Punkt B_a. In Abb. 14 ist zufällig $P_3'B_{23} = P_2'B_{23}$, so daß B_a im Unendlichen liegt und der Kreis k_{23}' aller Punkte A_{02} durch die Gerade k_{23}', in B_{23} senkrecht auf $P_2'P_3'$ stehend, dargestellt wird. Mit dem X_2'-Strahl auf $B_{23}A_{02}'$ zeichnet man das Strahlenbüschel mit den Winkeln $\sphericalangle\, X_0' B_{23} X_2' = \frac{1}{2}\gamma_{23}$ und $\sphericalangle\, X_0' B_{23} X_1' = \frac{1}{2}\gamma_{14}$ und findet A_{01}' auf dem X_1'-Strahl mit $E_2A_{01}' = E_1A_{02}'$. Die Gerade durch den auf n_2 angenommenen Pol P_2' schneidet den X_0'-Strahl in A_2', während die Mittelsenkrechte auf $A_{01}'A_{02}'$ den gleichen Strahl in A_a schneidet. Die Aufgabe ist erst dann erfüllt, wenn $A_aA_2' = 0$, wenn die Gerade $P_2'A_{02}'$ und die erwähnte Mittelsenkrechte sich also in einem Punkt auf dem X_0'-Strahl schneiden. Man kann deshalb die Pole P_3' und P_2' auf n_3 und n_2 jeweils auf einer Geraden durch B_{23} so lange verschieben, bis diese Bedingung erfüllt ist. In Abb. 14 gilt dies für die Pole P_2 und P_3, für welche die Gesamtkonstruktion, beispielsweise auch der Kreis k_{23} mit Hilfe der vier harmonischen Punkte P_2, P_3, B_{23}, B_a erkennbar ist.

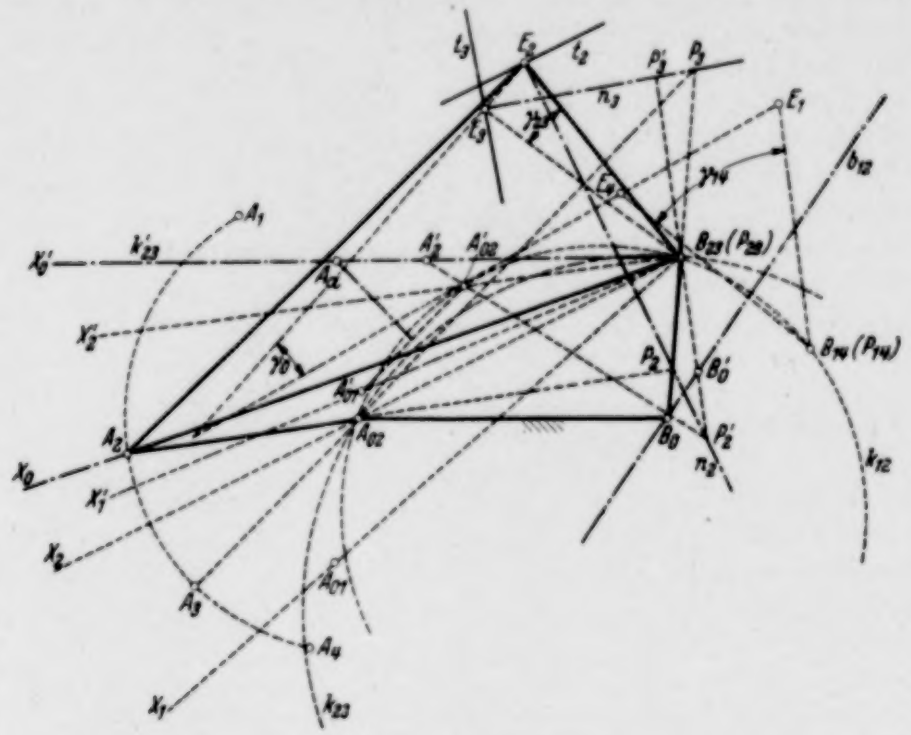


Abb. 14. Gegeben vier Punktlagen und zwei Tangenten mit dem Gelenkpunkt B_{23} als Punktlagenreduktion.

5. Schlußbetrachtungen. Es wurden Konstruktionen für das Gelenkviereck gezeigt, mit denen gegebene Punktlagen und in einigen von diesen noch gegebene Tangenten verwirklicht werden können. Dabei wurden zwei verschiedene Grundkonstruktionen, die zu Punktlagenreduktionen führen, angegeben und so eine willkommene Auswahlmöglichkeit gegeben. Insgesamt können mit Hilfe zeichnerischer Interpolationen, wenn eine gegebene Punktlage mit einer gegebenen Tangente als gleichwertig eingesetzt wird, vom Gelenkviereck bei der Anwendung von Punktlagenreduktionen sieben Bedingungen erfüllt werden.

Punktlagenreduktionen erlauben erstmalig eine einwandfreie maßsynthetische Behandlung auch der vielgliedrigen Getriebe, so daß deren Vorteile nun voll ausgenutzt werden können. So ist es z. B. möglich, mit einem sechsgliedrigen Kurbelgetriebe bei Anwendung von Punktlagenreduktionen bis zu elf Punktlagen zu beherrschen[1]. Das würde also bedeuten, daß man beispielsweise für ein sechsgliedriges Getriebe im Höchstfalle fünf Tangenten und sechs Punktlagen oder vier Tangenten und sieben Punktlagen erfüllen kann usw. Für Getriebe mit mehr als sechs Gliedern kann man dann die Forderungen entsprechend höher stellen und somit auch den höchsten Ansprüchen mit der entsprechenden Gliederzahl genügen.

[1] K. *Hain*, Werkstatt und Betrieb, 80 (1947) S. 189.

(Eingegangen am 9. Mai 1949.)

Anschrift des Verfassers: *Kurt Hain*, (20b) Braunschweig, Juliusstraße 31f.

Die nichtisotherme laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren*.

Von H. Hausenblas.

1. Zweck der Untersuchung. Das *Hagen-Poiseuille*sche Gesetz ist bisher nur unter der Voraussetzung betrachtet worden, daß die durch innere Reibung entwickelte Wärme und die dadurch bedingte Temperaturerhöhung keinen Einfluß auf die Zähigkeit der Flüssigkeit haben. Das setzt entweder sehr langsame Bewegungen voraus, bei denen keine nennenswerte Erwärmung auftritt, oder Flüssigkeiten, deren Zähigkeit von der Temperatur nicht abhängig ist.

Fast alle uns bekannten Flüssigkeiten zeigen aber eine starke Abnahme der Zähigkeit mit der Temperatur. Eine Ausnahme davon machen künstlich hergestellte Mischungen und Stoffe; insbesondere die in der letzten Zeit viel genannten Silikone sollen eine von der Temperatur fast unabhängige Zähigkeit aufweisen. Im allgemeinen ist das aber nicht der Fall, vor allem nicht bei Schmierölen. In hoch beanspruchten Gleitlagern treten große Schergeschwindigkeiten auf, bei denen die Erwärmung durch innere Reibung nicht mehr vernachlässigt werden darf. In den üblichen Viskosimetern wird aber die Zähigkeit bei einer schleichenden Bewegung bestimmt, deren Schergeschwindigkeiten so klein sind, daß die Erwärmung durch innere Reibung vernachlässigt werden kann. Zur Beurteilung des Schmiervorganges wird stets die auf letztgenannte Weise bestimmte Zähigkeit herangezogen. Dabei können sich Abweichungen ergeben, die mangels geeigneter, wissenschaftlich begründeter Unterlagen nicht beurteilt werden können. In den Kreisen der Fachleute herrscht nun seit langem die Ansicht, daß die auf der Hydrodynamik begründete Lehre vom Schmiervorgang nicht imstande ist, viele wichtige Beobachtungen beim Schmiervorgang zu erklären. Dabei hat man allerdings immer nur die einfachsten Lösungen der Hydrodynamik zum Vergleich herangezogen.

Aus diesen Gründen bleibt die Frage zu untersuchen, ob die bisherige Bestimmung der Viskosität bei schleichender Bewegung geeignet ist, den Schmiervorgang bei großen Schergeschwindigkeiten zu beurteilen. Diese Möglichkeit ist nicht ausgeschlossen, jedoch vermag vielleicht eine Viskosimetrie bei hohen Schergeschwindigkeiten, wie sie von *Arveson*[1] angestrebt wurde, die hydrodynamische Theorie der Schmierung und die Beobachtungen besser in Einklang zu bringen.

Darüber hinaus besteht ganz allgemein das Bedürfnis, das *Hagen-Poiseuille*sche Gesetz unter den Bedingungen zu kennen, bei denen die Erwärmung durch innere Reibung nicht mehr vernachlässigbar ist. Die Forderung nach einer solchen Untersuchung stellt schon *Ten Bosch* in der Einleitung seines Buches „Die Wärmeübertragung".

Im folgenden soll daher versucht werden, das *Hagen-Poiseuille*sche Gesetz unter der Voraussetzung zu behandeln, daß Flüssigkeiten verwendet werden, deren Zähigkeit nicht von der Schergeschwindigkeit, sondern von der aus der inneren Reibung folgenden Temperaturerhöhung abhängt. Auch für die Physik der Kolloide ist eine solche Untersuchung wichtig; denn eine Abnahme der Viskosität mit der Temperaturerhöhung, die durch innere Reibung bei hoher Schergeschwindigkeit entsteht, wirkt im selben Sinne wie eine Abnahme der Viskosität mit der Schergeschwindigkeit, wie sie bei Kolloiden beobachtet wird. Die Untersuchung bietet daher mit eine Grundlage zur Entscheidung darüber, ob etwaige Abweichungen von der üblichen Aussage des *Hagen-Poiseuille*schen Gesetzes auf die Erwärmung durch innere Reibung oder auf eine Abnahme der Viskosität mit der Schergeschwindigkeit, also auf das Vorhandensein einer nicht-*Newton*schen Flüssigkeit zurückzuführen sind.

Es wird die stationäre, laminare Strömung durch einen engen, von zwei zueinander parallelen Ebenen gebildeten Spalt unbegrenzter Breite bzw. durch ein Kapillarrohr behandelt. Zur Vereinfachung des behandelten Problems soll hier ferner angenommen werden, daß der betrachtete Teil des Strömungsfeldes hinreichend weit von der Einlaufstelle in den engen Spalt bzw. das Kapillarrohr entfernt sein soll, so daß sich die Strömungsgeschwindigkeit, die Temperatur der strömenden Flüssigkeit und der Druckgradient beim Fortschreiten in der Strömungsrichtung nicht mehr

---

* Gekürzte Fassung der von der Technischen Hochschule Berlin 1944 angenommenen Dissertation (Berichter Prof. Dr. *G. Hamel*, Mitberichter Prof. Dr.-Ing. *H. Gröber*).

[1] *M. H. Arveson*, Ind. Eng. Chem. 24 (1932), S. 71, und 26 (1934), S. 628.

ändern. Der von der Einlaufstelle in den Spalt bzw. das Kapillarrohr bis zu der eben festgelegten Stelle reichende Teil wird als Anlaufstrecke bezeichnet. Die genaue Verfolgung der Vorgänge in der Anlaufstrecke bereitet mathematisch einige Schwierigkeiten, weshalb hierfür bisher nur eine Abschätzung der Erhöhung der über den Spalt bzw. Rohrquerschnitt gemittelten Temperatur innerhalb der gesamten Anlaufstrecke vorliegt (Energetische Rechnung von *M. Hersey*[1]). Eine weitere Arbeit von *W. Schumacher*[2] behandelt die laminare Strömung bei starker Energieaussetzung in der Anlaufstrecke eines Ringspaltes. Hier werden jegliche Wärmeleitung und Wärmeübergang in erster Näherung vernachlässigt und eine an der Einlaufstelle angenommene parabolische Geschwindigkeitsverteilung als längs der Spaltlänge unverändert vorausgesetzt.

Als Vorläufer der vorliegenden Arbeit sind im wesentlichen anzusehen die Arbeiten von *W. Nusselt*[3, 4], von *R. Nahme*[5] und von *A. Kingsbury*[6]. Die Arbeit von *Nusselt* hat die parabolische Geschwindigkeitsverteilung in einem Rohr kreisförmigen Querschnittes und eine anfängliche Übertemperatur der strömenden Flüssigkeit zur Voraussetzung, behandelt also, wie auch einige neuere Arbeiten, den Wärmeübergang bei laminarer Strömung durch ein Rohr. Beim hier behandelten Fall hingegen strömt die Flüssigkeit mit derselben Temperatur, die auch die Wandungen besitzen, in den Spalt bzw. das Rohr ein und erwärmt sich in der Anlaufstrecke allmählich durch die in ihr selbst durch die innere Reibung erzeugte Wärme. Da die Geschwindigkeitsverteilung von *W. Nusselt* von vornherein als gegeben betrachtet wird, braucht für die Abhängigkeit der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit von deren Temperatur keine Annahme gemacht zu werden. Die Arbeit von *Nahme* behandelt die Strömung durch einen engen, ebenen Parallelspalt unbegrenzter Breite, dessen eine Wand gegen die andere translatorisch unter Beibehaltung der Spaltbreite verschoben wird. Dabei wird in dem gesamten Strömungsfeld konstanter Druck und damit auch konstante Schubspannung vorausgesetzt. Die Abhängigkeit der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit von deren Temperatur wird durch eine Exponentialfunktion angenähert. Die Arbeit von *Kingsbury* enthält für den von *Nahme* behandelten Fall der Spaltströmung eine graphische Lösung für beliebige, graphisch gegebene Abhängigkeit der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit von deren Temperatur.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Arbeit wurde dem Verfasser noch eine Arbeit von *Philippoff*[7] bekannt, der in dieser Arbeit ebenfalls den hier behandelten Fall der Strömung durch ein Kreisrohr bearbeiten wollte. Es erschien daher notwendig, diese Arbeit im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit besonders zu behandeln (vgl. Abschnitt 9).

2. Die allgemeinen Gleichungen für die laminare Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit. Die Ausgangsgleichungen für alle im folgenden wiedergegebenen Untersuchungen bilden die Grundgleichungen für die laminare Strömung einer zähen Flüssigkeit. Diese Gleichungen sollen im folgenden in jener Form zusammengestellt werden, wie sie später gebraucht werden, also für inkompressible Flüssigkeiten mit veränderlicher Zähigkeit. Sie sollen sowohl in kartesischen Koordinaten als auch in Zylinderkoordinaten angegeben werden, da beide Formen später gebraucht werden.

Die *Navier-Stokes*sche Bewegungsgleichung in kartesischen Koordinaten für die späterhin allein benötigte z-Richtung lautet

$$\varrho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial \eta}{d x}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial \eta}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + 2\frac{d\eta}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \quad (1)$$

bzw. in Zylinderkoordinaten (Abb. 7) ebenfalls für die z-Richtung

$$\varrho \frac{Dc_z}{Dt} = -\frac{\partial p}{dz} + \eta\left[\frac{\partial}{r\,\partial r}\left(r\frac{\partial c_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 c_z}{r^2\,\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial z^2}\right] + \frac{\partial \eta}{\partial r}\left(\frac{\partial c_r}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial r}\right) + \left| \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \eta}{r\,\partial \varphi}\left(\frac{\partial c_u}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{r\,\partial \varphi}\right) + 2\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial c_z}{\partial z}. \right| \quad (2)$$

Die Energiegleichung lautet für kartesische Koordinaten

$$\gamma c \frac{D\vartheta}{Dt} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) + \eta \cdot \text{Diss. Fktn.}, \quad (3)$$

---

[1] *M. D. Hersey* und *J. C. Zimmer*, Journ. appl. Physics 8 (1937), S. 359.
[2] *W. Schumacher*, Ing.-Arch. 1 (1930), S. 444.
[3] *W. Nusselt*, Z. VDI. 54 (1910), S. 1154.
[4] *Gröber-Erk*, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. Berlin 1933.
[5] *R. Nahme*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 191.
[6] *A. Kingsbury*, Mech. Engeneering 55 (1933), S. 685.
[7] *W. Philippoff*, Physik. Z. 43 (1942), S. 373.

wobei mit Diss. Fktn. die Dissipationsfunktion, also der folgende Differentialausdruck bezeichnet wurde:

$$\text{Diss. Fktn.} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 . \tag{4}$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Energiegleichung

$$\gamma c \frac{D\vartheta}{Dt} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{\partial \vartheta}{r\,\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{r^2\,\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right) + \eta \cdot \text{Diss. Fktn.} \tag{5}$$

und der Ausdruck für die Dissipationsfunktion

$$\text{Diss. Fktn.} = 2\left(\frac{\partial c_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial c_u}{r\,\partial \varphi} + \frac{c_r}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial c_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_u}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{r\,\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_z}{\partial r} + \frac{\partial c_r}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_r}{r\,\partial \varphi} + \frac{\partial c_u}{\partial r} - \frac{c_u}{r}\right)^2 . \tag{6}$$

Die Kontinuitätsgleichung wird beim tieferstehend behandelten Problem nicht benötigt.

3. Die Näherungslösung für die Spaltströmung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit. Für die Behandlung dieser Strömung durch enge, ebene, unbegrenzt breite Spalte wurde in dem Spalt ein Koordinatensystem nach Abb. 1 festgelegt. Es soll also die (y,z)-Ebene mit der Symmetrieebene des Spaltes zusammenfallen und die z-Achse in der Strömungsrichtung liegen. Im folgenden soll die eben gekennzeichnete Strömungsform der Kürze halber immer nur als „Spaltströmung" bezeichnet werden.

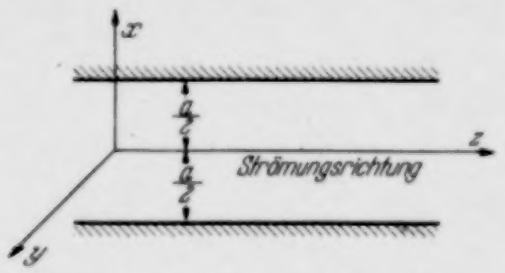


Abb. 1. Koordinatensystem im Spalt.

Als Voraussetzungen, unter denen die Strömung durch den Spalt betrachtet werden soll, sind zu nennen:

a) Stationäre Strömung.

b) Es soll sich um eine ebene laminare Strömung handeln, so daß also Strömungsgeschwindigkeit, Druck, Temperatur und damit auch die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit in entsprechenden Punkten aller zur (x, z)-Ebene parallelen Ebenen dieselben, insbesondere $u \equiv 0$ und $v \equiv 0$ sind.

c) Es soll nur jener Teil der Strömung betrachtet werden, der so weit von der Einlaufstelle in den Spalt entfernt vor sich geht, daß bereits $\partial w/\partial z \equiv 0$ und $\partial \vartheta/\partial z \equiv 0$ sind. Durch letztere Voraussetzung ist, da die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit als nur von deren Temperatur abhängig betrachtet werden soll, auch $\partial \eta/\partial z \equiv 0$ im gesamten betrachteten Teil des Strömungsfeldes. Es sollen also im betrachteten Teil des Strömungsfeldes an allen Stellen z dieselben Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile über x vorhanden sein.

d) An den Spaltwandungen soll die strömende Flüssigkeit dauernd dieselbe Temperatur ϑ_w haben, die im weiteren immer als Spaltwandungstemperatur bezeichnet werden soll.

Nach obigem ist also lediglich in der z-Richtung eine Druckänderung vorhanden, für die daher der totale Differentialquotient dp/dz geschrieben werden kann. Zur Vereinfachung der Schreibweise soll entgegen dem üblichen Gebrauch, der auch Gleichung (1) zugrunde liegt, im weiteren immer ein positives dp/dz einen Druckabfall (also keinen Druckanstieg) in Strömungsrichtung, also in Richtung der positiven z-Achse bedeuten. Unter Beachtung dessen und der Voraussetzungen a) bis d) nimmt also die *Navier-Stokes*sche Differentialgleichung (1) für den Spalt folgende Form an:

$$\frac{d}{dx}\left(\eta \frac{dw}{dx}\right) = -\frac{dp}{dz} \tag{7}$$

bzw. integriert

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dz}\,x \tag{8}$$

(Integrationskonstante gleich Null aus Symmetriegründen).

Wegen der Voraussetzung c) ist die linke Seite der Gleichung (7) von z unabhängig, so daß auch dp/dz einen von z unabhängigen Wert haben muß.

Die so direkt aus der *Navier-Stokes*schen Gleichung hergeleitete Gl. (8) kann auch direkt durch eine Gleichgewichtsbetrachtung für ein Flüssigkeitselement erhalten werden.

Gleichung (8) läßt sich vorläufig noch nicht integrieren, da bisher die Verteilung der Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit über x noch nicht bekannt ist. Sie hängt von der sich einstellenden

Temperaturverteilung im Spalt ab, da die Zähigkeit η der strömenden Flüssigkeit als nur von deren Temperatur ϑ abhängig angenommen wird. Das Temperaturprofil erhält man aus der Energiegleichung (3) und (4). Diese lautet[1] für die Spaltströmung unter Beachtung der angegebenen Voraussetzungen a) bis d)

$$\lambda \frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \eta \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 0 \tag{9}$$

Berücksichtigt man nun (8), so erhält man[2]

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} + \frac{1}{\lambda\eta}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 x^2 = 0\,. \tag{10}$$

Um die Differentialgleichung (10) für die Temperaturverteilung $\vartheta = \vartheta(x)$ im Spalt integrieren zu können, ist noch die Zähigkeitskurve $1/\eta = 1/\eta(\vartheta)$ der strömenden Flüssigkeit zu berücksichtigen[3]. Die größten Vorteile bietet eine lineare Näherungsfunktion

$$\frac{1}{\eta} = k_0 + k_1\vartheta\,, \tag{11}$$

da dann (10) in eine *Bessel*sche Differentialgleichung übergeführt werden kann. Man erhält dann Temperaturprofile, die sich durch die *Bessel*schen Funktionen darstellen lassen. Dies bietet den Vorteil, daß die Frage der Konvergenz eines sonst nötigen allgemeinen Reihenansatzes zur Lösung der Differentialgleichung von vornherein erledigt ist.

Die Frage, ob die mit der linear interpolierten Zähigkeitskurve erhaltenen Lösungen die wahren Verhältnisse hinreichend genau annähern, wird im Abschnitt 4 behandelt werden. Die zu integrierende Differentialgleichung ist also

$$\frac{d^2\Theta}{dx^2} + N\Theta x^2 = 0 \tag{12}$$

mit der Konstanten

$$N = \frac{k_1}{\lambda}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 \tag{13}$$

und

$$\Theta = \vartheta + \frac{k_0}{k_1} \tag{14}$$

als neuer Veränderlicher. Die Größe Θ ergibt eine Temperaturskala mit gegenüber ϑ derart verschobenem Nullpunkt, daß $\eta = 1/k_1\Theta$ bei $\Theta = 0$ einen Pol besitzt. Da negative Zähigkeiten der strömenden Flüssigkeit keinen physikalischen Sinn haben, verliert die hier verwendete Näherungsfunktion für die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit in der Nähe von $\Theta = 0$ ihren Sinn und damit wird auch die für Θ aus (12) erhaltene Lösung dort unbrauchbar.

Als Lösung der Differentialgleichung (12) erhält man bei Beachtung der notwendigen Symmetrie

$$\Theta = \Theta_m \Lambda_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{N}}{2}x^2\right); \tag{15}$$

dabei ist $\Lambda_{-1/4}$ die zur *Bessel*schen Funktion $J_{-1/4}$ gehörige Reihe[4]

$$\Lambda_{-1/4}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!}\,\frac{(-1/4)!}{(-1/4+\nu)!}\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu} = 1 - \frac{t^2}{3} + \frac{t^4}{42} - + \cdots \tag{16}$$

(vgl. Zahlentafel 1 und Abb. 2). $\Lambda_{-1/4}(t)$ wurde nur bis zur ersten Nullstelle angegeben, da diese der vorhin angegebenen Gültigkeitsgrenze der linearen Interpolationskurve der Zähigkeit entspricht.

Die Größe Θ_m ist dabei die maximale, in Spaltmitte auftretende Temperatur, die aus der bekannten Spaltwandungstemperatur Θ_w durch

$$\Theta_m = \frac{\Theta_w}{\Lambda_{-1/4}\left(\frac{\sqrt{N}}{2}\,\frac{a^2}{4}\right)} \tag{17}$$

erhalten wird.

---

[1] Gegenüber der entsprechenden Gleichung bei *Nahme* und anderer ist hier das mechanische Wärmeäquivalent A herausgelassen, da angenommen wurde, daß für alle in der Gleichung vorkommenden Größen von vornherein in einem einheitlichen Maßsystem gerechnet wird.

[2] Gegenüber der entsprechenden Differentialgleichung (5) der Arbeit von *Nahme* bereitet die Differentialgleichung (10) bei der Integration dadurch größere Schwierigkeiten, daß die Schubspannung in unserem Fall von x abhängt, bei *Nahme* aber nicht.

[3] Im folgenden mag immer die Kurve der Reziprokwerte $1/\eta$ über ϑ als Zähigkeitskurve bezeichnet werden, da immer nur $1/\eta$ benötigt wird.

[4] Vgl. *Jahnke-Emde*, Funktionentafeln. Leipzig und Berlin 1933 (2. Aufl.), S. 128.

Zahlentafel 1.

t	$\Lambda_{-1/4}(t)$	$F_1(t)$	$F_2(t)$	$F_3(t)$
0,0	+ 1,000	+ 0,50000	+ 0,16667	+ 0,33333
0,1	0,997	0,49944	0,16659	0,33285
0,2	0,987	0,49778	0,16635	0,33143
0,3	0,970	0,49502	0,16595	0,32907
0,4	0,947	0,49117	0,16540	0,32577
0,5	0,918	0,48626	0,16470	0,32156
0,6	0,883	0,48031	0,16384	0,31647
0,7	0,842	0,47334	0,16283	0,31051
0,8	0,796	0,46541	0,16168	0,30373
0,9	0,745	0,45654	0,16038	0,29616
1,0	0,690	0,44677	0,15894	0,28783
1,1	0,630	0,43617	0,15737	0,27880
1,2	0,567	0,42479	0,15568	0,26911
1,3	0,501	0,41267	0,15386	0,25881
1,4	0,433	0,39988	0,15192	0,24796
1,5	0,362	0,38648	0,14987	0,23661
1,6	0,291	0,37255	0,14771	0,22484
1,7	0,219	0,35813	0,14546	0,21267
1,8	0,147	0,34331	0,14311	0,20020
1,9	0,075	0,32816	0,14068	0,18748
2,0	0,004	0,31274	0,13817	0,17457
2,1	− 0,065	0,29713	0,13559	0,16154
2,2	− 0,132	0,28139	0,13295	0,14844

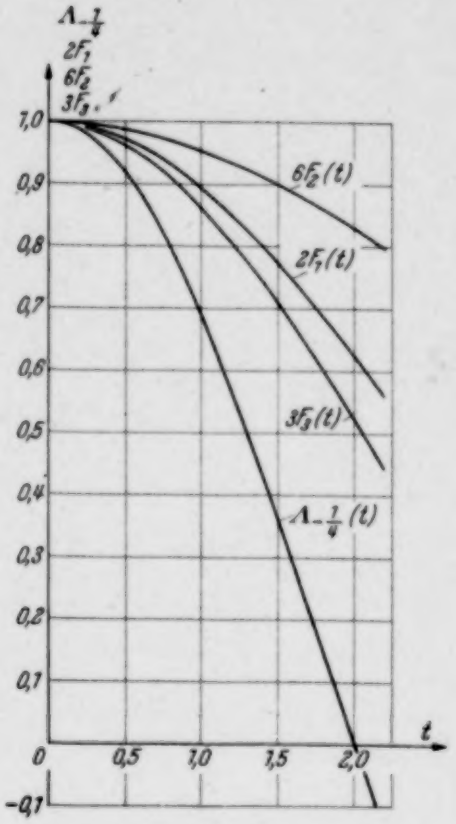


Abb. 2. Vergleich der Funktionen; ebener Spalt.

Nunmehr kann auch die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt durch Integration gefunden werden:

$$w = \frac{1}{\eta_m}\frac{dp}{dz}\left[\frac{a^2}{4}F_1\left(\frac{\sqrt{N}}{2}\frac{a^2}{4}\right) - x^2 F_1\left(\frac{\sqrt{N}}{2}x^2\right)\right], \tag{18}$$

wobei als Randbedingung $w=0$ für die Spaltwände bei $x=\pm a/2$ beachtet wurde. Hier bedeutet $\eta_m = 1/k_1\Theta_m$ die in Spaltmitte auftretende Zähigkeit, $F_1(t)$ die Funktion

$$F_1(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\frac{(-1/4)!}{(-1/4+\nu)!}\frac{1}{4\nu+2}\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu} \tag{19}$$

(vgl. Zahlentafel 1, Abb. 2).

Für das Durchflußvolumen durch den Spalt in der Zeiteinheit und je Einheit der Spaltbreite erhält man

$$Q = \frac{1}{\eta_m}\frac{dp}{dz}\frac{a^3}{4}F_3\left(\frac{\sqrt{N}}{2}\frac{a^2}{4}\right) \tag{20}$$

mit

$$F_2(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}\frac{(-1/4)!}{(-1/4+\nu)!}\frac{1}{(4\nu+2)(4\nu+3)}\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu} \tag{21}$$

und

$$F_3(t) = F_1(t) - F_2(t) \tag{22}$$

(vgl. Zahlentafel 1, Abb. 2).

Um eine den Ähnlichkeitsgesetzen entsprechende Darstellung der am meisten interessierenden Übertemperaturen $\vartheta - \vartheta_w$ in der strömenden Flüssigkeit gegenüber der Wandtemperatur ϑ_w zu erhalten, müssen diese durch $\Theta_w = \vartheta_w + k_0/k_1$ dimensionslos gemacht werden:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_w}{\vartheta_w + k_0/k_1} = \frac{\Lambda_{-1/4}\left(\frac{4x^2}{a^2}\mathfrak{N}_1\right)}{\Lambda_{-1/4}(\mathfrak{N}_1)} - 1, \tag{23}$$

wobei $\mathfrak{N}_1$ die Ähnlichkeitskennziffer

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\sqrt{N}}{2}\frac{a^2}{4} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{k_1}{\lambda}}\frac{dp}{dz}a^2 \tag{24}$$

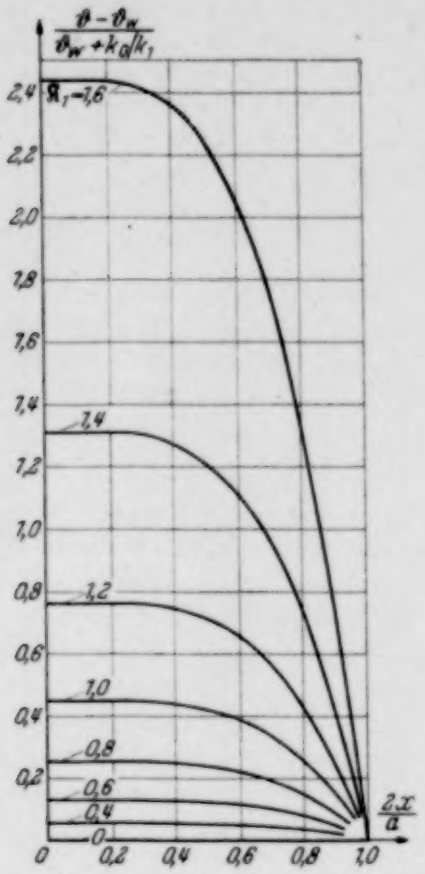


Abb. 3. Temperaturprofile; ebener Spalt.

Zahlentafel 2.*

$\mathfrak{N}_1$	$\frac{\vartheta_m-\vartheta_w}{\vartheta_w+k_0/k_1}$	$\frac{w_m}{w_*}$	$\frac{Q}{Q_*}$
0,0	0,000	1,000	1,000
0,1	0,003	1,001	1,001
0,2	0,013	1,010	1,006
0,3	0,031	1,020	1,019
0,4	0,056	1,038	1,032
0,5	0,090	1,060	1,050
0,6	0,132	1,089	1,074
0,7	0,189	1,121	1,105
0,8	0,257	1,169	1,141
0,9	0,342	1,228	1,197
1,0	0,450	1,295	1,252
1,1	0,589	1,382	1,330
1,2	0,763	1,500	1,425
1,3	1,000	1,650	1,551
1,4	1,310	1,847	1,720
1,5	1,765	2,132	1,958
1,6	2,440	2,562	2,320

* Die in dieser Zahlentafel angegebenen Zahlenwerte haben nur Rechenschiebergenauigkeit.

darstellt. Einige Temperaturprofile sind in Abb. 3 zusammengestellt (vgl. Zahlentafel 2). Die Übertemperaturen werden mit wachsender Kennziffer $\mathfrak{N}_1$ größer. $\mathfrak{N}_1=0$ entspricht der isothermen Strömung. Die Übertemperaturen nehmen erst in der Nähe der Spaltwandung in stärkerem Maße ab (da die Temperaturprofile in erster Näherung Parabeln vierter Ordnung entsprechen).

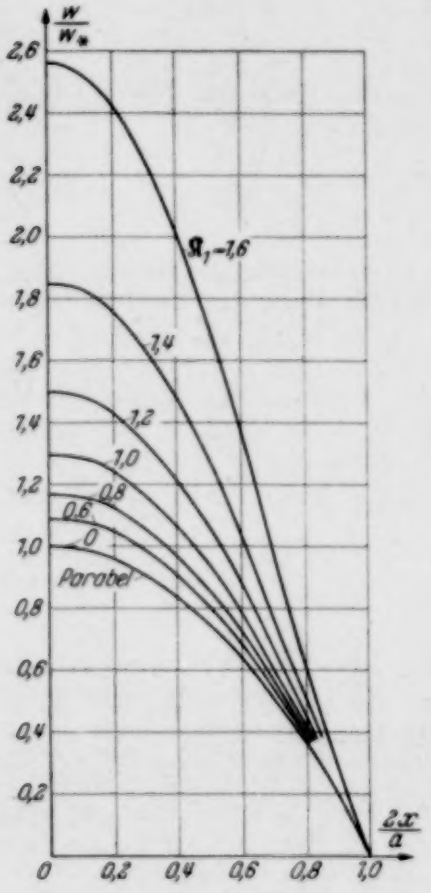


Abb. 4. Geschwindigkeitsprofile; ebener Spalt.

Die Geschwindigkeitsprofile sollen durch die bei isothermer Strömung einer Flüssigkeit von der Temperatur ϑ_w (also mit der Zähigkeit η_w) in Spaltmitte auftretende maximale Geschwindigkeit

$$w_* = \frac{1}{\eta_w}\frac{dp}{dz}\frac{a^2}{8} \tag{25}$$

dimensionslos gemacht werden:

$$\frac{w}{w_*} = \mathfrak{W}_1 = \frac{2}{\Lambda_{-1/4}(\mathfrak{N}_1)}\left[F_1(\mathfrak{N}_1) - \left(\frac{2x}{a}\right)^2 F_1\left(\frac{4x^2}{a^2}\mathfrak{N}_1\right)\right]. \tag{26}$$

$\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{W}_1$ sind die beiden für die Geschwindigkeitsprofile maßgebenden Ähnlichkeitskennzahlen. Die in Abb. 4 für einige $\mathfrak{N}_1$-Werte dargestellten Geschwindigkeitsprofile zeigen, daß die Abweichungen gegenüber der isothermen Strömung erheblich werden können. Bei hohen $\mathfrak{N}_1$-Werten zeigen die Geschwindigkeitsprofile in ihren Flanken bemerkenswerterweise einen S-Schlag. An der Spaltwandung haben alle Geschwindigkeitsprofile wegen gleicher Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit denselben Anstieg.

Auch das Durchflußvolumen durch den Spalt soll für die Auftragung mit dem Durchflußvolumen Q_* bei isothermer Strömung durch den Spalt

$$Q_* = \frac{1}{\eta_w}\frac{dp}{dz}\frac{a^3}{12} \tag{27}$$

dimensionslos gemacht werden:

$$\frac{Q}{Q_*} = 3\,\frac{F_3(\mathfrak{N}_1)}{\Lambda_{-1/4}(\mathfrak{N}_1)}. \tag{28}$$

Die Darstellung dieser Beziehung in Abb. 5 zeigt, daß das Durchflußvolumen durch den Spalt bei nichtisothermer Strömung bei größeren Kennzahlen $\mathfrak{N}_1$ das Durchflußvolumen bei isothermer Strömung wesentlich übersteigt. Solange bei kleinen $\mathfrak{N}_1$-Werten die Geschwindigkeitsprofile nicht allzusehr vom parabolischen abweichen, stimmt der Anstieg von Q/Q_* über $\mathfrak{N}_1$ praktisch mit dem von w_m/w_* überein (wobei w_m die in Spaltmitte auftretende maximale Geschwindigkeit ist). Später steigt w_m/w_* wegen abnehmender Völligkeit der Geschwindigkeitsprofile stärker als Q/Q_* an.

Hält man bei verschiedenen Spaltweiten durch entsprechende Änderung des angelegten Druckgefälles das Durchsatzvolumen konstant, so nehmen die Übertemperaturen im Spalt mit steigender Spaltweite ab.

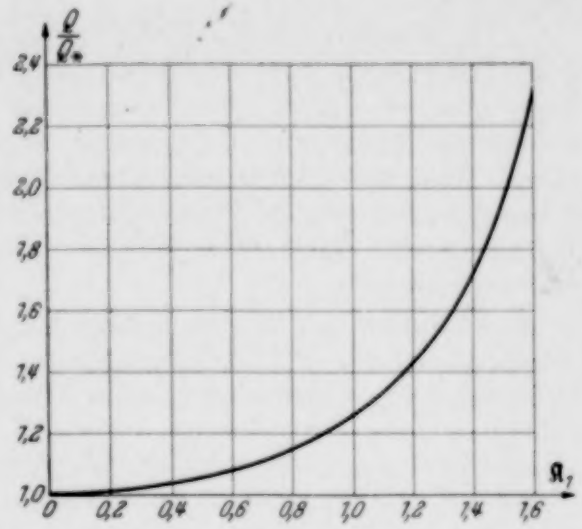


Abb. 5. Durchflußvolumina; ebener Spalt.

4. Die Näherungslösung für die Spaltströmung mit parabolisch interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit. Gegen die bisherige Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit kann leicht eingewendet werden, daß sich die Interpolationsgerade unter Umständen allzusehr von der tatsächlichen Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit entfernen wird. Um diesen Einwand zu entkräften, soll im folgenden zum Vergleich eine weitere Näherungslösung angegeben werden, bei der die Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit entsprechend dem Vorgehen von *Poiseuille* wie folgt parabolisch angenähert werden soll:

$$\frac{1}{\eta} = K_0 + K_1 \vartheta + K_2 \vartheta^2 . \tag{29}$$

Damit erhält jetzt die Differentialgleichung (10) für die Temperaturverteilung im Spalt die folgende Form:

$$\frac{d^2 \vartheta}{d x^2} + M(K_0 + K_1 \vartheta + K_2 \vartheta^2) x^2 = 0 , \tag{30}$$

wobei M die folgende Konstante darstellen soll:

$$M = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 . \tag{31}$$

Die Differentialgleichung (30) hat nun gegenüber der früheren Differentialgleichung (12) den großen Nachteil, daß sie sich nicht mehr durch bekannte Funktionen, sondern nur durch einen Reihenansatz lösen läßt. Wegen der Symmetrieeigenschaft des Temperaturprofiles kommt als Reihenansatz für die Temperatur ein solcher mit nur geradzahligen Exponenten in Frage, also

$$\vartheta = \sum_{n=0}^{\infty} T_{2n} x^{2n} , \tag{32}$$

wobei T_{2n} die Koeffizienten der Reihe darstellen soll. Man erhält folgende Rekursionsformeln für die Koeffizienten

$$T_{4\nu-2} = 0 , \tag{33}$$

$$T_{4\nu} = - \frac{M}{4\nu(4\nu-1)} \left[K_1 T_{4\nu-4} + K_2 \left(T_{2\nu-2}^2 + 2 \sum_{\mu=0}^{\frac{\nu-2}{2}} T_{4\mu} T_{4(\nu-\mu-1)} \right) \right] , \tag{34}$$

wobei (33) für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ und (34) für $\nu = 2, 3, \ldots$ gilt. Für $\nu = 1$ gilt an Stelle von (34)

$$T_4 = - \frac{M}{12} (K_0 + K_1 T_0 + K_2 T_0^2) . \tag{35}$$

Das konstante Glied T_0 der Reihe stellt, wie leicht ersichtlich, die maximale, in Spaltmitte auftretende Temperatur ϑ_m der strömenden Flüssigkeit dar. Beim Vergleich des zweiten Gliedes der Reihe für ϑ (35) mit (16) erkennt man die nahe Verwandtschaft der jetzigen Lösung mit der früheren; das zweite Glied der jetzigen Reihe für ϑ läßt sich nämlich in Übereinstimmung mit dem zweiten Glied der Reihe (16) unter Beachtung der Identität $T_0 \equiv \vartheta_m$ und der Gleichung (29) wie folgt schreiben:

$$T_4 x^4 = - \frac{1}{\lambda \eta_m} \left(\frac{dp}{dz}\right)^2 x^4 .$$

Bei den weiteren Gliedern wird aber dann die Abweichung der jetzigen Lösung von der früheren bemerkbar.

Bei der praktischen Anwendung der jetzigen Lösung für ϑ treten die folgenden beiden Schwierigkeiten auf:

1) Die Koeffizienten der Reihe hängen, wie (34) zeigt, sämtlich von dem Koeffizienten T_0, also der in Spaltmitte auftretenden maximalen Temperatur ϑ_m ab. Eine der Gleichung (17) entsprechende Beziehung, aus der zu einer bestimmten Spaltwandungstemperatur ϑ_w sofort die in Spaltmitte auftretende Temperatur ϑ_m berechenbar wäre, läßt sich bei der jetzigen Lösung nicht mehr angeben. Man muß also bei der praktischen Anwendung der jetzigen Näherungslösung zuerst für einige geschätzte ϑ_m die Temperaturprofile ausrechnen und dann jenes aussuchen, das für $x = \pm a/2$ das gewünschte ϑ_w erreicht. Die Berechnung nach der jetzigen Näherungslösung wird dadurch sehr zeitraubend.

2) Es lassen sich für die jetzige Näherungslösung keine allgemeingültigen Temperaturprofile (entsprechend den in Abb. 3 gezeigten) angeben, da die Temperaturprofile jetzt außer von der die Randbedingungen kennzeichnenden Konstanten M auch noch von der Kombination der für die Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit kennzeichnenden Größen K_0, K_1, K_2 abhängen. Es ist also jetzt eine größere Mannigfaltigkeit von Temperaturprofilen gegeben.

Diese beiden Nachteile werden eine Anwendung dieser Lösung in größerem Maße wohl praktisch unmöglich machen, und daher soll diese Näherungslösung hier nur zur Kontrolle der Genauigkeit der vorher angegebenen Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit verwendet werden. Dazu genügt es, anzunehmen, daß immer an Stelle der Spaltwandungstemperatur ϑ_w die maximale, in Spaltmitte auftretende Temperatur ϑ_m gegeben sei.

Um auf einfachem Wege die Geschwindigkeitsprofile zu erhalten, werde zunächst (8) umgeformt. Aus (30) folgt

$$\frac{1}{\eta} = -\frac{1}{M x^2}\frac{d^2\vartheta}{dx^2}, \tag{36}$$

womit (8) folgende Form annimmt:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\lambda}{\frac{dp}{dz}}\frac{1}{x}\frac{d^2\vartheta}{dx^2}. \tag{37}$$

Nach Einsetzen der Reihe für $d^2\vartheta/dx^2$ und gliedweiser Integration erhält man mit der in Spaltmitte auftretenden Maximalgeschwindigkeit w_m als Integrationskonstanten

$$w_m - w = -\frac{\lambda}{\frac{dp}{dz}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{4\nu(4\nu-1)}{4\nu-2}T_{4\nu}x^{4\nu-2}. \tag{38}$$

Durch nochmalige Integration dieser Gleichung über x zwischen den Grenzen $\pm a/2$ erhält man nun noch das Durchflußvolumen durch den Spalt in der folgenden Form:

$$w_m a - Q = \int_{-a/2}^{+a/2}(w_m - w)\,dx = -\frac{\lambda}{\frac{dp}{dz}}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\cdot 4\nu}{4\nu-2}T_{4\nu}\left(\frac{a}{2}\right)^{4\nu-1}. \tag{39}$$

Als Ergebnis von Vergleichsrechnungen der jetzigen mit der früheren Näherungslösung kann man angeben, daß die Lösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve bis $\mathfrak{N}_1 \approx 1{,}5$ innerhalb der Rechengenauigkeit mit der jetzigen übereinstimmt. Bis $\mathfrak{N}_1 \approx 1{,}7$ sind die sich dann einstellenden Abweichungen so gering, daß sie sicher noch in der Meßgenauigkeit liegen werden. Man kann also $\mathfrak{N}_1 = 1{,}7$ als praktische Anwendungsgrenze der Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve ansprechen, sofern man die Interpolationsgerade einigermaßen günstig legt und die Zähigkeitskurve etwa die üblichen Krümmungen aufweist.

5. Eine graphische Lösung für die Spaltströmung. Im folgenden soll kurz noch ein graphisches Verfahren angegeben werden, das es ermöglicht, die Differentialgleichung für die Temperaturverteilung im Spalt

$$-\frac{d^2\vartheta}{dx^2} = \frac{1}{\eta}Mx^2 \tag{40}$$

[über die Konstante M siehe (31)] für eine ganz beliebige, lediglich durch eine Kurve $1/\eta = f(\vartheta)$ gegebene Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit zu lösen. Es handelt sich dabei um die z. B. von *Runge*[1] angegebene graphische Methode zur Lösung einer Differentialgleichung zweiter Ordnung.

[1] *C. Runge*, Graphische Methoden S. 133. Leipzig und Berlin 1915.

Leider hat auch diese Methode ebenso wie die in Abschn. 4 beschriebene analytische Methode den Nachteil, daß bei der Berechnung der Temperaturverteilung nicht von der Spaltwandungstemperatur ϑ_w, sondern von der maximalen, in Spaltmitte auftretenden Temperatur ϑ_m ausgegangen werden muß. Bei der praktischen Anwendung müßte man also auch hier so, wie auf S. 158 unter 1) beschrieben, vorgehen. Die Anwendung dieser graphischen Methode wird also wohl nur dann in Frage kommen, wenn die Zähigkeitskurve $1/\eta$ der strömenden Flüssigkeit derart stark gekrümmt ist, daß die beschriebene analytische Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit zu starke Abweichungen aufweist. Im folgenden soll an Hand von Abb. 6 das graphische Verfahren beschrieben werden.

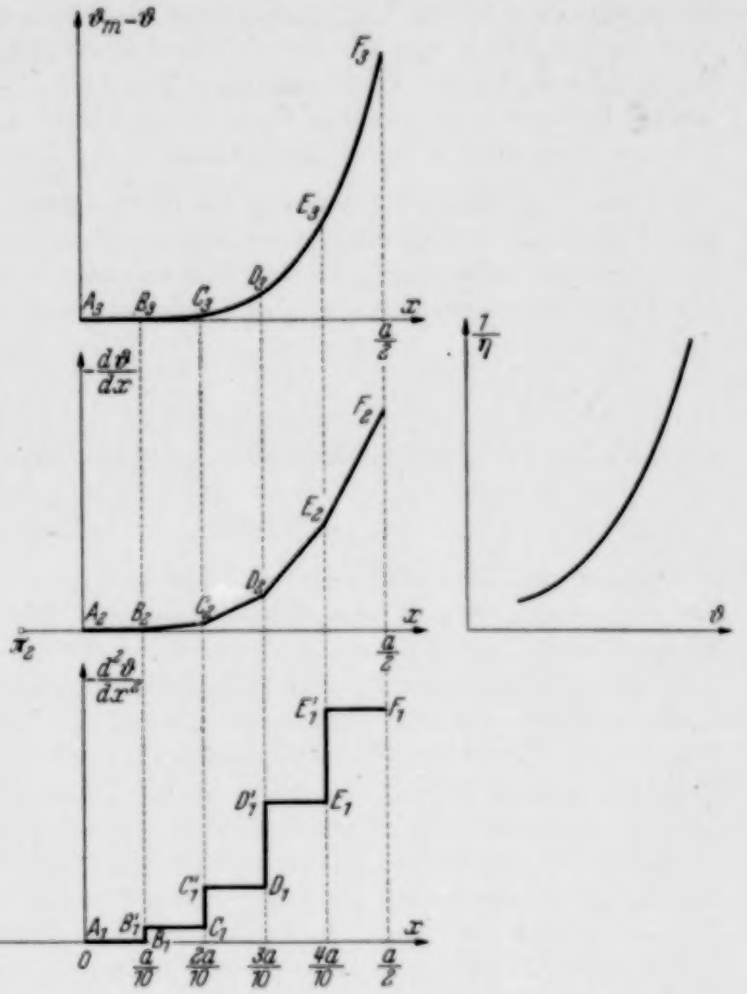


Abb. 6. Graphische Lösung der Differentialgleichung für die Temperaturverteilung im ebenen Spalt.

Zunächst sind die Anfangswerte $-d^2\vartheta/dx^2=0$, $-d\vartheta/dx=0$, $\vartheta_m-\vartheta=0$ für $x=0$ bekannt. Dies ergibt die Punkte A_1, A_2, A_3 in Abb. 6. Nun werde der Bereich von $x=0$ bis $a/2$ in eine gewisse Anzahl von Abschnitten unterteilt, die am einfachsten gleich groß gewählt werden. In Abb. 6 wurden fünf derartig gleich großer Abschnitte gewählt. Nun kann man zunächst, da vorerst eine genauere Annahme nicht möglich ist, den Anfangswert $-d^2\vartheta/dx^2=0$ als Näherungswert für den gesamten ersten Abschnitt annehmen. Die Kurve $-d^2\vartheta/dx^2$ wird also in erster Näherung im ersten Abschnitt durch $A_1 B_1$ dargestellt. Dieses Kurvenstück kann nun unter Benutzung der Pole π_1 und π_2 mit dem *Runge*schen graphischen Integrationsverfahren[1] zweimal integriert werden, was als erste Annäherung für $-d\vartheta/dx$ im ersten Abschnitt $A_2 B_2$ und als erste Näherung für $\vartheta_m-\vartheta$ im ersten Abschnitt $A_3 B_3$ ergibt. Durch den Punkt B_3 ist nun $\vartheta_m-\vartheta$ bzw. die Temperatur ϑ der strömenden Flüssigkeit bei $x=a/10$ in erster Näherung bekannt. Für diese Temperatur ϑ kann nun aus der Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit der zugehörige Wert von $1/\eta$ entnommen werden. Damit berechnet man nun einen ersten Näherungswert von $-d^2\vartheta/dx^2$ an der Stelle $x=a/10$ aus (40), was in Abb. 6 eingetragen den Punkt B_1' ergibt. Nimmt man nun wieder diesen Näherungswert von $-d^2\vartheta/dx^2$ bei $x=a/10$ als Näherungswert von $-d^2\vartheta/dx^2$ in dem gesamten zweiten Abschnitt, also von $x=a/10$ bis $x=2a/10$ an (Strecke $B_1' C_1$), so kann man wieder den schon beschriebenen Vorgang durchführen. Durch dauernde Wiederholung des beschriebenen Verfahrens kann man nun schrittweise die Differentialgleichung (40) in erster Näherung integrieren.

Um eine zweite Näherung zu erhalten, berechnet man mit den ersten Näherungswerten der Temperatur ϑ der strömenden Flüssigkeit (gegeben durch die Kurve $A_3 F_3$) zweite Näherungswerte von $-d^2\vartheta/dx^2$ aus (40) unter Benutzung der Zähigkeitskurve $1/\eta$ über ϑ der strömenden Flüssigkeit für $x=0$, $a/10$, $2a/10$, ... $a/2$ und verbindet die diese Werte darstellenden Punkte (sie stimmen übrigens mit den schon vorhandenen Punkten A_1, B_1', ... E_1' überein) nach Gefühl durch eine glatte Kurve. Durch zweimalige graphische Integration dieser Kurve mit dem *Runge*schen Verfahren erhält man nun eine zweite Näherung für die Temperatur ϑ der strömenden Flüssigkeit im Spalt. Um nun aus der zweiten Näherungskurve die dritte Näherungskurve für den

[1] Vgl. *Runge*, a. a. O. S. 96.

Temperaturverlauf ϑ im Spalt zu erhalten, ist das beschriebene Verfahren zu wiederholen. Meist wird man feststellen können, daß sich bereits die dritte Näherungskurve nur sehr wenig von der zweiten Näherungskurve unterscheidet, so daß man meist das graphische Verfahren nach Erhalt der zweiten Näherungskurve für die Temperaturverteilung im Spalt abbrechen können wird.

Die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt erhält man durch die folgende Konstruktion. Man berechnet aus (8) für eine Anzahl von x-Werten zwischen Null und $a/2$ (z. B. wieder für $x=0$, $a/10$, $2a/10, \ldots a/2$) die Werte $-dw/dx$ und trägt diese über x auf. Durch graphische Integration unter Beachtung der Randbedingung $w_m - w = 0$ für $x=0$ erhält man die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt in der Darstellung $w_m - w$ über x. Durch nochmalige graphische Integration über x von $x=0$ bis $a/2$ erhält man die Durchflußvolumina durch den Spalt in der Form $w_m x - Q/2$, woraus sich an Hand der aus dem vorherigen graphischen Rechnungsgang für die verschiedenen Spaltweiten bekannten maximalen Geschwindigkeiten w_m die Durchflußvolumina Q in Abhängigkeit von der Spaltweite a berechnen lassen.

6. Die Ähnlichkeitsbetrachtung für die Spaltströmung. Bei der Ähnlichkeitsbetrachtung wird eine Modellausführung mit einer Hauptausführung verglichen. Die Unterscheidung der beiden Ausführungen möge durch Umklammerung der Formelzeichen der einen Ausführung geschehen. Als Ähnlichkeitskennziffer für die Temperaturverteilungen erhält man

$$\mathfrak{N} = \frac{\frac{dp}{dz}\, a^2}{\sqrt{\vartheta\, \lambda\, \eta}}\,, \tag{41}$$

während für die Geschwindigkeitsverteilungen neben $\mathfrak{N}$ noch die weitere Ähnlichkeitskennziffer

$$\mathfrak{W} = \frac{w\, \eta}{\frac{dp}{dz}\, a^2} \tag{42}$$

maßgebend ist. Ähnlichkeit ist aber überhaupt nur dann erreichbar, wenn die Zähigkeitskurven der strömenden Medien von Haupt- und Modellausführung so gestaltet sind, daß sich für die Zähigkeiten der strömenden Flüssigkeiten bei den durch den Temperaturmaßstab $(\vartheta)/\vartheta$ gekoppelten Temperaturen ein fester Zähigkeitsmaßstab $(\eta)/\eta$ ergibt. Letztere Bedingung wird wohl nur selten exakt erfüllbar sein. Am einfachsten gelingt dies bei Verwendung ein und desselben strömenden Mediums für Haupt- und Modellausführung durch Einhaltung des Temperaturmaßstabes $(\vartheta)/\vartheta = 1$. Man hat dann zur Erreichung der Ähnlichkeit nur noch den Wert $dp/dz\, a^2$ bei Haupt- und Modellausführung gleich groß zu machen. Der Geschwindigkeitsmaßstab ist dann ebenfalls gleich Eins.

Bei linear interpolierter Zähigkeitskurve gehen die Ähnlichkeitskennziffern $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{W}$ in $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{W}_1$ über, sofern man die Temperaturen in der Skala (Θ) (an Stelle ϑ) mißt. Die zusätzlichen Schwierigkeiten bezüglich des Festhaltens des Zähigkeitsmaßstabes verschwinden dann.

Bei parabolisch interpolierter Zähigkeitskurve stellt sich die zusätzliche Bedingung bezüglich der Form der Zähigkeitskurven wie folgt dar:

$$\frac{(K_0)}{K_0} = \frac{(K_1)}{K_1}\,\frac{(\vartheta)}{\vartheta} = \frac{(K_2)}{K_2}\left[\frac{(\vartheta)}{\vartheta}\right]^2 = \frac{1}{\frac{(\eta)}{\eta}}\,. \tag{43}$$

7. Die Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit für Kapillarrohre. Im folgenden soll nun das Problem der nichtisothermen laminaren Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit durch ein Kapillarrohr behandelt werden. Da die Lösung dieses Problems mit der Lösung des in dem bisherigen Teil der vorliegenden Arbeit behandelten Problems der Spaltströmung weitestgehend parallel läuft, soll das jetzige Problem nur in den grundlegenden Zügen behandelt werden. Auch hier soll die oben gekennzeichnete Strömung immer nur kurz als „Rohrströmung" bezeichnet werden.

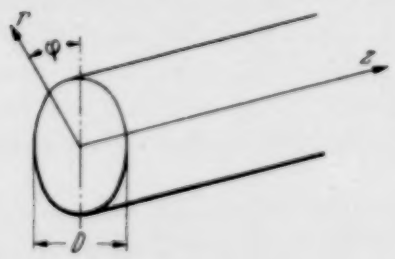


Abb. 7. Koordinatensystem im Kapillarrohr.

Das zur Behandlung der Rohrströmung im Kapillarrohr festgelegte Zylinderkoordinatensystem ist in Abb. 7 gezeigt. Die z-Achse soll also mit der Rohrachse zusammenfallen. Als Voraussetzungen, unter denen die Strömung durch das Kapillarrohr behandelt werden soll, sind zu nennen:

a) Stationäre Strömung.

b) Es soll sich um eine rotationssymmetrische, laminare Strömung handeln, so daß also Strömungsgeschwindigkeit, Druck, Temperatur und damit Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit vom Winkel φ unabhängig sowie $c_u \equiv 0$ und $c_r \equiv 0$ ist.

c) Es soll nur jener Teil der Strömung betrachtet werden, der so weit von der Einlaufstelle in das Kapillarrohr entfernt vor sich geht, daß bereits $\partial c_z/\partial z = 0$ und $\partial \vartheta/\partial z = 0$ sind. Durch letztere Voraussetzung ist, da die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit als nur von deren Temperatur abhängig betrachtet werden soll, auch $\partial \eta/\partial z = 0$ im gesamten betrachteten Teil des Strömungsfeldes. Es sollen also in dem betrachteten Teil des Strömungsfeldes an allen Stellen z dieselben Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile über dem Radius r vorhanden sein.

d) An den Rohrwandungen soll die strömende Flüssigkeit dauernd dieselbe Temperatur ϑ_w haben, die im weiteren immer als Rohrwandungstemperatur bezeichnet werden soll.

Nach obigem ist also lediglich in der z-Richtung eine Druckänderung vorhanden, für die wieder der totale Differentialquotient dp/dz geschrieben werden soll. Auch hier soll ein positives dp/dz einen Druckabfall in Richtung wachsender z bedeuten. Damit folgt aus der *Navier-Stokes*schen Differentialgleichung (2)

$$\frac{d}{dr}\left(\eta r \frac{dc_z}{dr}\right) = -r\frac{dp}{dz}. \tag{44}$$

Auch hier kann man aus dieser Gleichung wegen der Voraussetzung c) schließen, daß dp/dz im gesamten betrachteten Teil des Strömungsfeldes einen von z unabhängigen Wert hat.

Durch Integration von (44) nach r erhält man

$$\frac{dc_z}{dr} = -\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dz} r, \tag{45}$$

wobei die Integrationskonstante weggelassen wurde, da offenbar für $r=0$ $dc_z/dr=0$ werden muß.

Zur Integration von (45) über r ist nun noch die Kenntnis der Verteilung der Zähigkeit, also der Temperatur der strömenden Flüssigkeit über dem Radius notwendig. Man erhält das Temperaturprofil wieder aus der Energiegleichung, die hier unter Benutzung von (45) die folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{d^2\vartheta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{1}{4\lambda\eta}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 r^2 = 0. \tag{46}$$

Interpoliert man die Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit wieder nach (11) linear, so erhält man (46) unter Benutzung der Substitution (14) in der Form

$$\frac{d^2\Theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\Theta}{dr} + P\Theta r^2 = 0, \tag{47}$$

wobei

$$P = \frac{k_1}{4\lambda}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 \tag{48}$$

eine Konstante ist.

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet unter Beachtung der entsprechenden Randbedingungen

$$\Theta = \Theta_m J_0\left(\frac{\sqrt{P}}{2} r^2\right). \tag{49}$$

Dabei ist J_0 die *Bessel*sche Funktion von der Ordnung Null[1]

$$J_0(t) \equiv \Lambda_0(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu}. \tag{50}$$

Die in (49) enthaltene maximale, in Rohrmitte auftretende Temperatur Θ_m berechnet sich wieder aus der Rohrwandungstemperatur Θ_w durch

$$\Theta_m = \frac{\Theta_w}{J_0\left(\frac{\sqrt{P}}{2}\frac{D^2}{4}\right)}. \tag{51}$$

Auch hier interessiert ähnlich wie beim Spalt die Funktion J_0 nur bis in die Nähe ihrer ersten Nullstelle, d. h. bis etwa $t=2{,}4$ (vgl. Zahlentafel 3 und Abb. 8).

Beim Vergleich von J_0 mit der für die Temperaturverteilung im Spalt maßgebende Funktion $\Lambda_{-1/4}$ erkennt man, daß die beiden Funktionen nur wenig voneinander abweichen, so daß sich die Temperaturprofile im Spalt und im Rohr voneinander nur wenig unterscheiden werden. Allerdings ist zu beachten, daß die jetzt maßgebende Ähnlichkeitskennzahl

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{\sqrt{P}}{2}\frac{D^2}{4} = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{k_1}{\lambda}}\frac{dp}{dz} D^2 \tag{52}$$

den Faktor 1/16 enthält, während $\mathfrak{N}_1$ für die Spaltströmung [siehe (24)] den Faktor 1/8 enthielt,

[1] Vgl. *E. Jahnke* und *F. Emde*, a. a. O., S. 194.

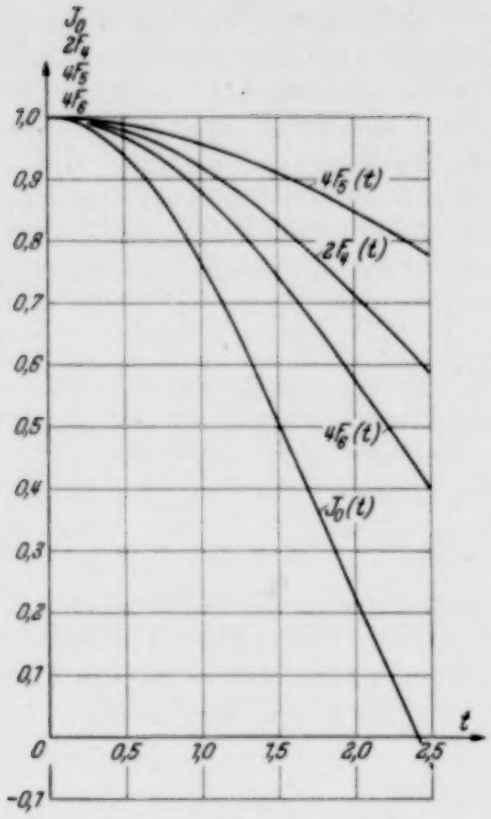


Abb. 8. Vergleich der Funktionen; Rohr.

Zahlentafel 3.

t	$J_0(t)$	$F_4(t)$	$F_5(t)$	$F_6(t)$
0,0	+ 1,0000	+ 0,50000	+ 0,25000	+ 0,25000
0,1	0,9975	0,49958	0,24990	0,24968
0,2	0,9900	0,49834	0,24958	0,24876
0,3	0,9776	0,49626	0,24906	0,24720
0,4	0,9604	0,49337	0,24834	0,24503
0,5	0,9385	0,48968	0,24741	0,24227
0,6	0,9120	0,48520	0,24628	0,23892
0,7	0,8812	0,47995	0,24496	0,23499
0,8	0,8463	0,47397	0,24344	0,23053
0,9	0,8075	0,46726	0,24173	0,22553
1,0	0,7652	0,45987	0,23984	0,22003
1,1	0,7196	0,45182	0,23777	0,21405
1,2	0,6711	0,44315	0,23553	0,20762
1,3	0,6201	0,43390	0,23312	0,20078
1,4	0,5669	0,42411	0,23056	0,19355
1,5	0,5118	0,41382	0,22784	0,18598
1,6	0,4554	0,40307	0,22498	0,17809
1,7	0,3980	0,39191	0,22198	0,16993
1,8	0,3400	0,38039	0,21886	0,16153
1,9	0,2818	0,36855	0,21561	0,15294
2,0	0,2239	0,35644	0,21226	0,14418
2,1	0,1666	0,34412	0,20881	0,13531
2,2	0,1104	0,33162	0,20526	0,12636
2,3	0,0555	0,31900	0,20164	0,11736
2,4	0,0025	0,30631	0,19794	0,10837
2,5	— 0,0484	0,29360	0,19418	0,09942

Das bedeutet, daß bei gleichem k_1, λ, dp/dz und $D=a$ die maximale, in Rohrmitte auftretende Übertemperatur für die beiden verglichenen Fälle kleiner sein wird, als die maximale, in Spaltmitte auftretende Übertemperatur. Dieses Verhalten erklärt sich dadurch, daß die Wärmeabfuhr im Rohr rotationssymmetrisch nach allen Seiten hin stattfinden kann.

Entsprechend wie beim Spalt erhält man nun die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr zu

$$c_z = \frac{1}{2\,\eta_m}\,\frac{dp}{dz}\left[\frac{D^2}{4}\,F_4\left(\frac{\sqrt{P}}{2}\,\frac{D^2}{4}\right) - r^2 F_4\left(\frac{\sqrt{P}}{2}\,r^2\right)\right], \tag{53}$$

wobei wieder $\eta_m = 1/k_1\Theta_m$ die Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit in Rohrmitte ist und $F_4(t)$ die folgende Funktion darstellen soll:

$$F_4(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \frac{1}{4\nu+2}\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu} \tag{54}$$

(vgl. Zahlentafel 3 und Abb. 8).

Das Durchflußvolumen durch das Rohr erhält man durch die Integration:

$$Q_R = \int_0^{D/2} 2\pi r\, c_z\, dr, \tag{55}$$

wobei der Index R bei Q darauf hinweisen soll, daß es sich um die Strömung durch ein Rohr handelt:

$$Q_R = \frac{1}{\eta_m}\,\frac{dp}{dz}\,\frac{D^2}{8}\,\frac{\pi D^2}{4}\,F_6\left(\frac{\sqrt{P}}{2}\,\frac{D^2}{4}\right), \tag{56}$$

$$F_6(t) = F_4(t) - F_5(t). \tag{57}$$

Die hierin auftretende weitere Funktion $F_5(t)$ ist definiert durch:

$$F_5(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \frac{1}{(4\nu+2)(2\nu+2)}\left(\frac{it}{2}\right)^{2\nu} \tag{58}$$

(vgl. Zahlentafel 3 und Abb. 8).

Zahlentafel 4.*

$\mathfrak{H}_1$	$\frac{\vartheta_m - \vartheta_w}{\vartheta_w + k_0/k_1}$	$\frac{c_{zm}}{c_{z*}}$	$\frac{Q_R}{Q_{R*}}$
0,0	0,000	1,000	1,000
0,1	0,002	1,003	1,003
0,2	0,010	1,008	1,005
0,3	0,023	1,018	1,012
0,4	0,040	1,028	1,020
0,5	0,067	1,045	1,033
0,6	0,095	1,063	1,048
0,7	0,135	1,090	1,068
0,8	0,180	1,120	1,090
0,9	0,239	1,158	1,118
1,0	0,306	1,202	1,150
1,1	0,390	1,258	1,190
1,2	0,490	1,320	1,238
1,3	0,611	1,400	1,295
1,4	0,762	1,495	1,365
1,5	0,952	1,618	1,453
1,6	1,195	1,770	1,563
1,7	1,510	1,970	1,708
1,8	1,940	2,235	1,900

* Die in dieser Zahlentafel angegebenen Zahlenwerte haben nur Rechenschiebergenauigkeit.

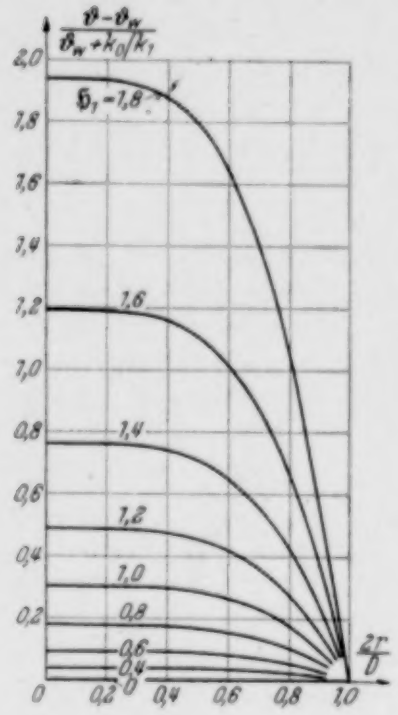


Abb. 9. Temperaturprofile; Rohr.

Zwecks Veranschaulichung der mit der eben beschriebenen Näherungslösung erhaltenen Ergebnisse sollen die Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile sowie die Durchflußvolumina durch das Rohr mit Hilfe der schon eingeführten Ähnlichkeitskennzahl $\mathfrak{H}_1$ [siehe (52)] entsprechend umgeformt werden, wie dies früher beim Spalt geschehen ist. Die Temperaturprofile erhält man in folgender dimensionsloser Darstellung:

$$\frac{\vartheta - \vartheta_w}{\vartheta_w + \frac{k_0}{k_1}} = \frac{J_0\left(\frac{4r^2}{D^2}\,\mathfrak{H}_1\right)}{J_0(\mathfrak{H}_1)} - 1\,. \tag{59}$$

Die zur Dimensionslosmachung der Geschwindigkeitsprofile benötigte maximale, in Rohrmitte auftretende Geschwindigkeit bei isothermer Strömung ist

$$c_{z*} = \frac{1}{\eta_w}\,\frac{dp}{dz}\,\frac{D^2}{16}\,. \tag{60}$$

Die dimensionslose Darstellung der Geschwindigkeitsprofile ergibt sich damit zu

$$\frac{c_z}{c_{z*}} = \mathfrak{C}_1 = \frac{2}{J_0(\mathfrak{H}_1)}\left[F_4(\mathfrak{H}_1) - \left(\frac{2r}{D}\right)^2 F_4\left(\frac{4r^2}{D^2}\,\mathfrak{H}_1\right)\right], \tag{61}$$

wobei $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ die für die Geschwindigkeitsverteilung maßgebenden Ähnlichkeitskennziffern sind.

Das Durchflußvolumen durch das Rohr bei nichtisothermer Strömung soll wieder mit dem Durchflußvolumen Q_{R*} durch das Rohr bei isothermer Strömung

$$Q_{R*} = \frac{1}{\eta_w}\,\frac{dp}{dz}\,\frac{D^2}{32}\,\frac{\pi D^2}{4} \tag{62}$$

verglichen werden, also

$$\frac{Q_R}{Q_{R*}} = 4\,\frac{F_6(\mathfrak{H}_1)}{J_0(\mathfrak{H}_1)}\,. \tag{63}$$

Die graphische Darstellung der Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile sowie der Durchflußvolumina durch das Rohr zeigen Abb. 9 bis 11. Die jetzigen Abbildungen zeigen im wesentlichen genau dieselben Besonderheiten, wie sie schon bei Abb. 3 bis 5 für die Spaltströmung besprochen wurden.

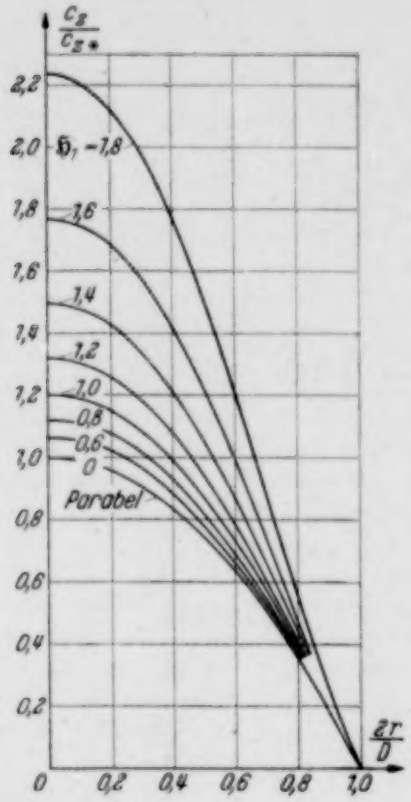


Abb. 10. Geschwindigkeitsprofile; Rohr.

Beim Vergleich der jetzigen Kurven für die Rohrströmung mit den Kurven für die Spaltströmung bemerkt man, daß die Abweichungen von der isothermen Strömung bei der Rohrströmung geringer sind als bei der Spaltströmung, um so mehr als noch bezüglich der Kennzahlen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{R}_1$ das bereits Gesagte gilt. Die Ähnlichkeitsgesetze für die Rohrströmung entsprechen vollkommen den für die Spaltströmung besprochenen.

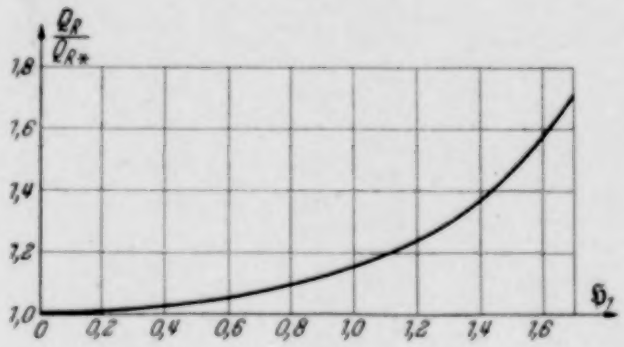


Abb. 11. Durchflußvolumina; Rohr.

8. Eine graphische Lösung für die Rohrströmung. Auch für die Rohrströmung ist das im Abschnitt **5** beschriebene graphische Verfahren verwendbar. Die zu lösende Differentialgleichung für die Temperaturverteilung hat allerdings jetzt eine etwas andere Form

$$-\frac{d^2\vartheta}{dr^2} = \frac{1}{r}\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{1}{\eta} L r^2. \tag{64}$$

wobei L die folgende Konstante bedeutet:

$$L = \frac{1}{4\lambda}\left(\frac{dp}{dz}\right)^2. \tag{65}$$

Diese Differentialgleichung enthält gegenüber der Differentialgleichung (40) für die Spaltströmung noch ein Glied mit $d\vartheta/dr$. Trotzdem ist der Gang des graphischen Verfahrens derselbe wie im Abschnitt **5** beschrieben und in Abb. 6 erläutert. Lediglich tritt jetzt an die Stelle von x der Radius r und an die Stelle der Spaltwandungen bei $\pm a/2$ die Rohrwandung bei $\pm D/2$. Bei der Berechnung des Näherungswertes $-d^2\vartheta/dr^2$ für den nächstfolgenden Integrationsabschnitt (z. B. den Abschnitt $D/10$ bis $2\,D/10$) ist außer dem Wert ϑ auch noch der Wert $d\vartheta/dr$ aus den entsprechenden Kurven der Abb. 6 für das Ende des vorhergehenden Integrationsabschnittes (also in unserem Beispiel im Punkt $D/10$) zu entnehmen.

Für die Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils sind jetzt die Werte $-dc_z/dr$ aus (45) zu berechnen. Sodann ist einfach über r graphisch zu integrieren, wodurch man $c_{zm} - c_z$ erhält.

Für die graphische Bestimmung des Durchflußvolumens durch das Rohr sind die Werte

$$\frac{d(c_{zm}\pi r^2 - Q_R)}{dr} = 2\pi r(c_{zm} - c_z)$$

für einige Stellen r zu berechnen, aufzutragen und durch eine glatte Kurve zu verbinden. Durch graphische Integration erhält man dann das gesamte Durchflußvolumen durch das Rohr in der Form $c_{zm}\pi r^2 - Q_R$.

9. Einige Bemerkungen zu der Arbeit von *Philippoff*. In der bereits erwähnten Arbeit von *Philippoff* wurde der Versuch unternommen, die hier in Abschnitt **7** und **8** behandelte Strömung durch ein Kapillarrohr theoretisch zu verfolgen. Es müßte daher die von *Philippoff* für die Berechnung der Temperaturprofile in der Kapillarröhre benutzte Gleichung (6) mit der in der vorliegenden Arbeit benützten Gleichung (46) übereinstimmen. Setzt man nun die von *Philippoff* benützten Festwerte ein, so erhält man eine Differentialgleichung, die vollkommen mit Gleichung (46) der vorliegenden Arbeit übereinstimmt, sofern man das zweite Glied in (46) weglassen würde.

Dieses zweite Glied stellt aber gerade den wesentlichen Unterschied zwischen der für das Kapillarrohr geltenden Differentialgleichung (46) und der für den Spalt geltenden Differentialgleichung (10) dar, sofern man von der verschiedenen Bezeichnung der unabhängigen Veränderlichen (r bzw. x) in diesen beiden Gleichungen absieht. Das bei *Philippoff* fehlende Glied entspricht der Umfangsänderung von $2\pi r$ auf $2\pi(r+dr)$ bzw. der Radienänderung von r auf $r+dr$ in bezug auf die radiale Wärmeableitung. Diese Radienänderung wurde also von *Philippoff* nicht berücksichtigt[1].

Wegen der Übereinstimmung der Gleichung (6) von *Philippoff* mit Gleichung (10) der vorliegenden Arbeit könnte man nun annehmen, daß vielleicht die von *Philippoff* für das Kreisrohr abgeleiteten Ergebnisse für den ebenen Spalt verwendbar sind. Dies trifft für die Temperaturprofile tatsächlich zu, sofern man die in (46) im letzten Glied der linken Seite zusätzlich auftretende Zahl 4 mit in dp/dz hineinnimmt, also in die Gleichung (6) von *Philippoff* in ϑ_0' das Doppelte des tatsächlich vorhandenen Druckgefälles einsetzt. Dagegen lassen sich die von *Philippoff* für die Geschwindigkeitsprofile abgeleiteten Gleichungen nicht für den ebenen Spalt übernehmen, da sie bei der Beachtung des eben Gesagten Temperaturprofile für das doppelte Druckgefälle mit Gleichgewichtsbetrachtungen für die Schubspannungen und das einfache Druckgefälle (also nicht auch das doppelte Druckgefälle) zusammennehmen.

Zu der von *Philippoff* im VI. Abschnitt seiner Veröffentlichung wiedergegebenen energetischen Rechnung ist folgendes zu sagen.

Die Energiegleichung für den betrachteten Strömungsvorgang verlangt wegen der vorausgesetzten großen Entfernung von der Einlaufstelle die Gleichheit der im Inneren der Flüssigkeit erzeugten Wärmemenge [von *Philippoff* mit q_3 bezeichnet; vgl. seine Gleichungen (39), (40) und (42)] und der an die Rohrwandung abgeführten Wärmemenge [von *Philippoff* mit q_2 bezeichnet; vgl. seine Gleichungen (37) und (38)]. Betrachtet man nun die Abb. 7 bei *Philippoff*, so muß man feststellen, daß diese Gleichheit nicht vorhanden ist. Wodurch dies bedingt ist, ist nicht ohne weiteres ersichtlich; doch ist zu vermuten, daß dies auf das schon besprochene fehlende Glied in der Gleichung (6) bei *Philippoff* zurückzuführen ist.

Nimmt man nun an, daß in der Abb. 6 bei *Philippoff* die Kurven für q_2 und q_3, wie eben als erforderlich erkannt, zusammenfallen, so kommt man zu dem Ergebnis, daß die Gültigkeitsgrenze zwischen hydrodynamischer und adiabatischer Theorie nach $\beta\vartheta_0''=0$ rückt, also die hydrodynamische Theorie überhaupt nicht brauchbar erscheint. Dies erklärt sich wieder folgendermaßen. Die wiedergegebene Lösung des Problems ist entsprechend der von *Philippoff* gegebenen Ableitung die asymptotische Lösung für großen Abstand von der Einlaufstelle in das Kapillarrohr. Dann tritt aber die Wärmemenge q_1 [Gleichung (36) bei *Philippoff*] am Anfang des betrachteten Teiles des Rohres in dieses ein und genau dieselbe Wärmemenge q_1 am Ende des betrachteten Rohrteiles wieder aus diesem aus. Für die asymptotische Lösung gilt also, wie schon weiter oben erwähnt, $q_2=q_3$, in welcher Beziehung q_1 nicht auftreten darf. Die Bedingung $q_3=q_1+q_2$ [Gleichung (44) von *Philippoff*] ist also für die asymptotische Lösung unzutreffend.

Für die gesamte Anlaufstrecke vom Einlauf in das Kapillarrohr bis zum Beginn des Gültigkeitsbereiches der asymptotischen Lösung müßte allerdings gelten $q_3=q_1+q_2$. In der Anlaufstrecke ist dies aber auch trotz der Gültigkeit von $q_2=q_3$ für die asymptotische Lösung möglich, weil sich in der Anlaufstrecke geringere Übertemperaturen einstellen werden. Dadurch wird in der Anlaufstrecke q_2 kleiner als im asymptotischen Teil (und dazu noch von Ort zu Ort verschieden). Aus demselben Grunde wird in der Anlaufstrecke, die über den Rohrquerschnitt gemittelte Zähigkeit der strömenden Flüssigkeit größer als im asymptotischen Teil, so daß in der Anlaufstrecke q_3 voraussichtlich größer wird, als im asymptotischen Teil. Es wird also in der Anlaufstrecke q_3-q_2 endlich und positiv und muß dann eben gleich q_1 werden, sofern man, wie oben verlangt, die gesamte Anlaufstrecke ins Auge faßt.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß es wohl nicht angeht, hydrodynamische Theorie und energetische Rechnung nebeneinander auf gleiche Stufe zu stellen. Die energetische Rechnung hat lediglich solange eine Berechtigung als erste Abschätzung des Einflusses der in der Flüssigkeit entstehenden Reibungswärme, als eine genaue Theorie, die die Temperaturverteilungen in der strömenden Flüssigkeit ergibt, nicht bekannt ist. Die hydrodynamische Theorie hingegen ist wesentlich weitergehend, da sie eben eine vollständige Theorie mit ganz eindeutigen Voraussetzungen und Vernachlässigungen ist und nicht bloß eine erste Abschätzung wie die energetische Rechnung.

[1] Es hat den Anschein, daß in der Arbeit von *Philippoff* bei der Transformation auf Zylinderkoordinaten das Glied $(1/r)\,(\partial\vartheta/\partial r)$ neben $\partial^2\vartheta/\partial r^2$ vergessen wurde, denn das Glied fehlt bereits in der Differentialgleichung S. 374 unten sowie in den aus dieser abgeleiteten Gleichungen (1) und (4).

10. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wurde die laminare Strömung einer zähen inkompressiblen Flüssigkeit durch enge Spalte und Kapillarröhren unter Berücksichtigung der bei der Strömung in der Flüssigkeit durch die Reibung entstehenden Wärme behandelt. Es zeigte sich dabei, daß sich durch den eben erwähnten Effekt das Durchflußvolumen durch den Spalt bzw. das Kapillarrohr gegenüber dem nach der bisher meist verwendeten Näherungslösung für isotherme Strömung berechneten wesentlich erhöht. Diese Erhöhungen können bis zu 100% des für die isotherme Strömung berechneten Durchflußvolumens und mehr betragen. Die bei der nichtisothermen Strömung auftretenden Geschwindigkeitsprofile weichen dementsprechend von den für isotherme Strömung berechneten parabolischen Geschwindigkeitsprofilen ab; sie übersteigen die parabolische Geschwindigkeitsverteilung in der Spalt- bzw. Rohrmitte beträchtlich und werden dadurch spitzer und weniger völlig. Die Temperaturprofile im Spalt bzw. im Kapillarrohr entsprechen in erster Näherung Parabeln vierter Ordnung.

Für die praktische Berechnung wurde eine gut geeignete analytische Näherungslösung mit linear interpolierter Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit angegeben, die mit Hilfe der *Besselschen* Funktionen durchgeführt werden konnte. Daneben sind noch je ein graphisches Verfahren für die Spalt- und für die Rohrströmung angegeben, die es gestatten, die Zähigkeitskurve der strömenden Flüssigkeit genau zu berücksichtigen, die aber einige praktische Nachteile haben. Für die Spaltströmung wurde außerdem noch zur Abschätzung der Genauigkeit des zuerst genannten analytischen Verfahrens eine analytische Näherungslösung mit parabolisch interpolierter Zähigkeitskurve angegeben.

Eine Ähnlichkeitsuntersuchung wurde sowohl für die Spalt- als auch für die Rohrströmung durchgeführt.

(Eingegangen am 12. Mai 1949.)

Dr.-Ing. *Helmut Hausenblas*, Cite Voisin, Bât. A, rue de Faulquières Decize (Nièvre), Frankreich.

Die Verwirklichung vorgegebener Winkelgeschwindigkeitsgesetze bei Doppelkurbelgetrieben*.

Von K. Bach.

1. Einleitung. Im Maschinenbau treten oft getriebetechnische Probleme auf, die nicht durch gewöhnliche Zahnradgetriebe, Umlaufgetriebe oder andere gleichförmig übersetzende Getriebe gelöst werden können, z. B. überall dort, wo periodisch ungleichförmige Bewegungen erzeugt werden sollen[1]. Die hierbei zu verwirklichenden Bewegungen dienen durchweg der rein mechanischen Durchführung von Verarbeitungsprozessen, die im Vergleich zu der übrigen Entwicklung im allgemeinen Maschinenbau nur zögernd von Hand- auf Maschinenarbeit umgestellt wurden.

Wesentliche Forderungen, die an diese Getriebe gestellt werden müssen, sind leichte Herstellbarkeit, leichte Einstellbarkeit zum Zwecke des Zusammenbaus und der Justierung, Vermeidung zu hoher Massenkräfte, ruhiger, stoßfreier und geräuscharmer Gang, Bevorzugung niederer Elementenpaare (Gelenke) sowie schneller und billiger Ersatz. Obwohl Kurventriebe bei sehr verwickelten Bewegungsgesetzen sich nicht immer ganz vermeiden lassen, sollte man doch Gelenkgetrieben wegen der besseren Erfüllung der gestellten Forderungen, wenn irgend möglich, den Vorzug geben. Im Gegensatz zu unrunden Zahnrädern, deren Herstellung schwierig und teuer ist, besitzen Gelenkgetriebe denkbar einfache und billige Elemente. Um unrunde Zahnräder durch Gelenkgetriebe zu ersetzen, ist es nur notwendig, das durch die Zahnräder vermittelte Bewegungsgesetz zu kennen, um, unabhängig von deren Abmessungen, mit Hilfe einer vorgeschlagenen Methode die Abmessungen eines Gelenkgetriebes zu finden, das dieses Bewegungsgesetz möglichst genau erfüllt. Der heutige Stand der Getriebelehre bietet jetzt schon bewährte und einfache Methoden zur einwandfreien Konstruktion von Gelenkgetrieben, die gewissen, ganz bestimmten Bewegungsforderungen genügen[2].

So sind z. B. einfache und exakte Methoden zur Ermittlung der Gliedlängen bekannt, um bestimmte vorgegebene Schwingwinkel und Stillstandszeiten zu erzielen, oder auch um vorgegebene Bahnkurven zu erzeugen. Nicht dagegen war es bisher möglich, vorgegebene Geschwindigkeitsgesetze systematisch durch geeignete Getriebegestaltung zu verwirklichen.

Dies hat sich die vorliegende Arbeit zum Ziel gesetzt, und zwar für den Fall von Gelenkgetrieben, bei denen die Antriebswelle gleichförmig umläuft, während für die Abtriebswelle durch geeignete Bestimmung der Gliedlängen ein vorgegebenes Geschwindigkeitsgesetz näherungsweise verwirklicht wird.

2. Das ebene Gelenkviereck. Die einfachste Art einer solchen Bewegungsübertragung bietet das ebene Gelenkviereck nach Abb. 1 bei dem das feststehende Glied d, der „Steg", meist durch einen Teil des Maschinengestells dargestellt wird.

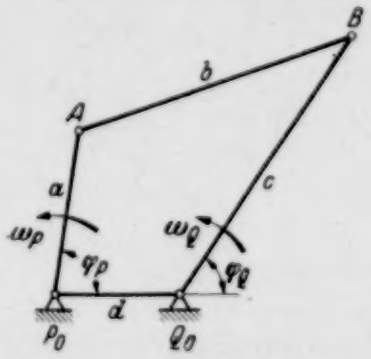


Abb. 1. Das Gelenkviereck.

Nach dem Satz von *Grashof*[3] kann ein Gelenkviereck nur dann eine Doppelkurbel (oder eine Bogenschubkurbel) sein, wenn die Summe aus der kleinsten und der größten Gliedlänge kleiner ist als die Summe aus den beiden anderen Gliedlängen; und zwar entsteht (vgl. Abb. 2) eine Doppelkurbel nur durch Feststellung des kürzesten Glieds (D) der Viergelenkkette, während durch Feststellung eines der (D) benachbarten Glieder (C) bzw. (A) eine Bogenschubkurbel bzw. eine umgekehrte Bogenschubkurbel und durch Feststellung des dem kleinsten Glied gegenüberliegenden Gliedes (B) eine Doppelschwinge mit umlaufender Koppel entsteht.

---

* Auszug aus der Karlsruher Dissertation des Verfassers. Diese Untersuchungen sind durch Herrn Prof. *O. Krämer* angeregt worden.

[1] *H. Alt*, Z. VDI. 81 (1937), S. 1111; *H. Alt*, Z. VDI. 75 (1931), S. 245; *W. Lichtenheldt*, Z. VDI. 75 (1931), S. 905; *H. Alt*, Z. VDI. 77 (1933), S. 409.

[2] *Wankel*, Zur Synthese des Gelenkvierecks, Diss. Dresden 1925; *K. Rauh*, Z. VDI. 76 (1932), S. 87; *H. Alt*, Z. VDI. 76 (1932), S. 533; *K. Rauh*, Praktische Getriebelehre. Berlin 1939.

[3] *Th. Pöschl*, Einführung in die ebene Getriebelehre. Berlin 1932.

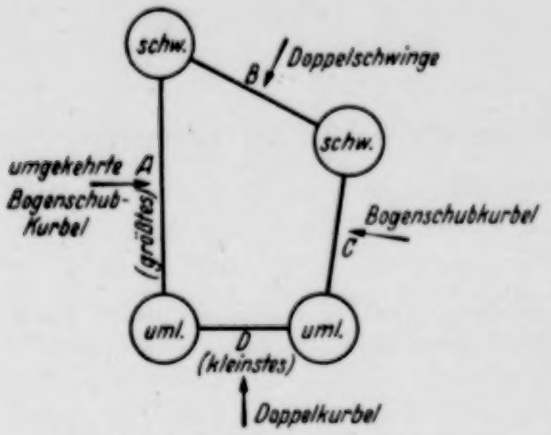


Abb. 2. Die Viergelenkkette (Erkl. im Text).

In Abb. 2 sind die gegenseitigen relativen Bewegungsmöglichkeiten der Glieder einer Viergelenkkette angegeben (in den Kreisen um die Gelenkpunkte), die durch Feststellung eines ihrer Glieder (Pfeile!) zu einem der angegebenen Getriebe wird. Der Antrieb sei jeweils am linken Ende des Steges, der Abtrieb am rechten. Das festgehaltene Glied wird in der weiteren Betrachtung des Getriebes als Steg d bezeichnet, die benachbarten Glieder als Kurbeln oder Schwingen a und c, und das dem festgehaltenen gegenüberliegende als Kurbel b. Ihre Bezeichnungen seien zugleich die Maße ihrer absoluten Längen. Zweckmäßig bezieht man diese noch auf die Steglänge, so daß diese selbst $=1$ wird, und die übrigen Gliedlängen sich schreiben

$$\frac{a}{d} = q, \qquad \frac{b}{d} = r, \qquad \frac{c}{d} = s.$$

Durch Anwendung der *Grashof*schen Ungleichungen auf alle möglichen Variationen zwischen kürzestem und längstem Glied lassen sich in einem ebenen Koordinatensystem durch Geraden $r=f(s)$ mit q als Parameter Bereiche abgrenzen, deren Punkte die Gliedabmessungen bestimmter Gelenkvierecke angeben.

Zum Zeichnen dieser Diagramme (Abb. 3) ergibt sich die einfache Regel: Man errichte im Abstand q sowohl auf der r- als auch der s-Achse ein Lot von der Länge 1 und erhält die Punkte G bzw. P. Punkt G erfüllt die Gliedlängenbedingungen für die gleichschenklige Doppelkurbel ($q>1$) bzw. die gleichschenklige Bogenschubkurbel ($q<1$), Punkt P die für die Parallel- und Antiparallelkurbel. Zieht man durch diese ausgezeichneten Punkte Geraden unter 45° und 135° und ebenso durch ihre Achsenschnittpunkte, dann erhält man Bereiche, deren Punkte die Gliedabmessungen der in Abb. 3 angegebenen Getriebe bestimmen.

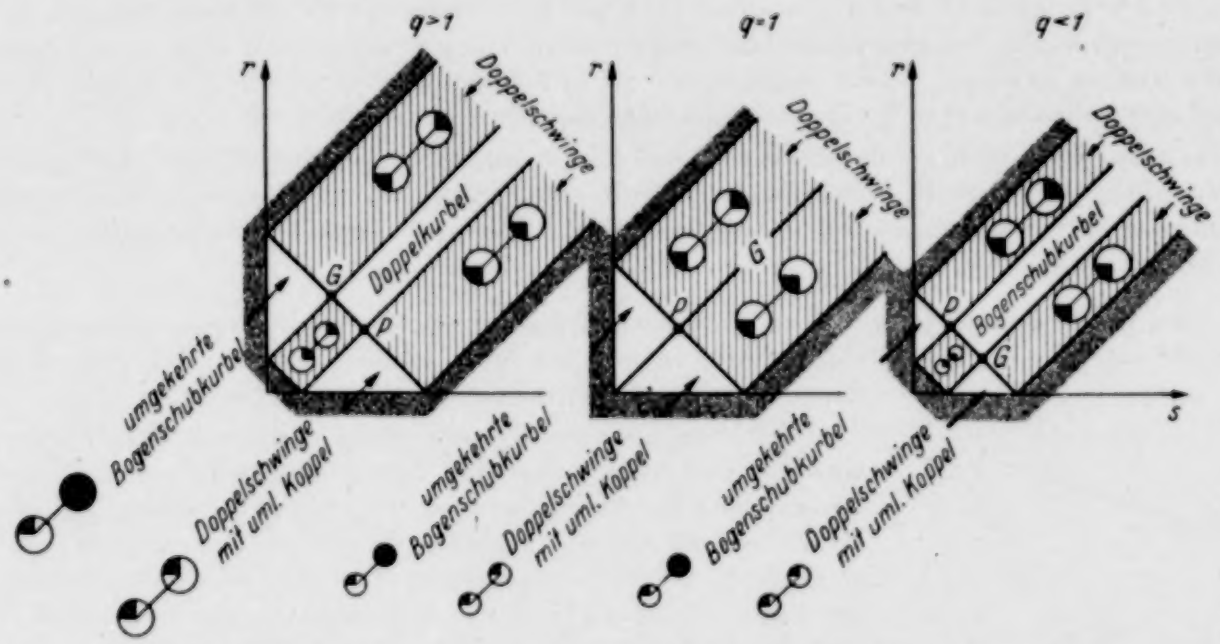


Abb. 3. Diagramme zur Ermittlung der Gliedlängen für bestimmte Bewegungsbedingungen.

Die äußeren Grenzen stellen starre Lagen dar, innere Grenzen Deck- und Strecklagen, die kein eindeutiges Bewegungsverhalten mehr zulassen. Für unsere weiteren Betrachtungen interessiert nur der mittlere unendliche Bereich, der Hauptbereich der Diagramme, mit $q>1$: die Doppelkurbel (Abb. 3 links).

3. Analytische Formulierung der Bewegungsgesetze. Bei der kinematischen Erfassung von Getrieben ist sowohl eine rein rechnerische als auch eine bewegungs-geometrische Betrachtungsweise möglich. Bei Gelenkgetrieben werden insbesondere geometrische Methoden bevorzugt. Diese Tatsache findet ihren Grund in den oft verwickelten Zusammenhängen einer großen Zahl von

Veränderlichen, die sich als Gliedlängen und besonders ausgezeichnete Getriebezustände, wie selbstsperrende und umkehrkritische Deck- oder Strecklagen darstellen und die sich in geometrischen Konstruktionen leicht und übersichtlich ermitteln lassen. Demgegenüber bietet die analytische Betrachtung zwar geringere Anschaulichkeit, aber größere Genauigkeit.

Die Bewegungsgesetze einfacher und zusammengesetzter Gelenkgetriebe, die sich aus der Viergelenkkette ableiten lassen, wurden ermittelt und sind in Abb. 4 übersichtlich zusammengestellt. Kurbelschleifen lassen sich aus Gelenkvierecken durch Ersatz von Drehpaaren durch Schiebepaare entwickeln. Durch Hintereinanderschalten von Kurbelschleifen ergeben sich auf einfache Weise neue Bewegungsgesetze. Die ermittelten Formeln gestatten eine exakte Darstellung des Verhältnisses der periodisch ungleichförmigen Abtriebswinkelgeschwindigkeit zu der als gleichförmig vorausgesetzten Antriebs-Winkelgeschwindigkeit (vgl. Tab. 1 und 2, Abb. 4 und 5).

Tabelle 1. *Bewegungsgesetze einfacher Gelenkgetriebe.*

Erklärungen (s. a. Abb. 4): P_0 = Antrieb, Q_0 = Abtrieb | $q = a/d$, $r = b/d$, $s = c/d$, $t = e/d$ | $f^2 = q^2 + 1 - 2q\cos\varphi_P$, $v = \sqrt{s^2 - \sin^2\varphi_P}$

Lfd. Nr.	Bezeichnung	Bewegungsgesetz	$\left(\frac{\omega_Q}{\omega_P}\right)_{\varphi_P = 0°}$	$\left(\frac{\omega_Q}{\omega_P}\right)_{\varphi_P = 180°}$
1	Doppelkurbel	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q}{f^2}\left[q - \cos\varphi_P + \frac{\sin\varphi_P}{\sqrt{\frac{4r^2f^2}{(r^2-s^2+f^2)^2} - 1}}\right]$	$\frac{q}{q-1}$	$\frac{q}{q+1}$ Für Decklagen $(r+s=q+1)$: $\frac{q \pm \sqrt{q}}{q+1}$
2	Antiparallelkurbel	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q^2-1}{f^2}$	$\frac{q+1}{q-1}$	$\frac{q-1}{q+1}$
3	Zentr. Kurbelschleife	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q^2 - q\cos\varphi_P}{f^2} = \frac{1}{1 + \frac{1/q - \cos\varphi_P}{q - \cos\varphi_P}}$	$\frac{q}{q-1}$	$\frac{q}{q+1}$
4	Exzentr. Kurbelschleife	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q}{f^2}\left[q - \cos\varphi_P (\mp) \frac{\sin\varphi_P}{\sqrt{(f/t)^2 - 1}}\right]$ Abwinkelung im Drehsinn $\sqrt{\ }$ Abwinkelung entgegen Drehsinn $\sqrt{\ }$	$\frac{q}{q-1}$ Für Strecklagen $(t=q-1)$: $\frac{q \mp \sqrt{q}}{q-1}$	$\frac{q}{q+1}$
5	Umgek. zentr. Kurbelschleife	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = 1 + \frac{\cos\varphi_P}{v}$	$\frac{s+1}{s}$	$\frac{s-1}{s}$
6	Umgek. exzentr. Kurbelschleife	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{v + \cos\varphi_P}{v (\mp) \frac{\sin\varphi_P}{\sqrt{(v+\cos\varphi_P)^2/t^2 - 1}}}$ Abwinkelung im Drehsinn $\sqrt{\ }$ Abwinkelung entgegen Drehsinn $\sqrt{\ }$	$\frac{s+1}{s}$	$\frac{s-1}{s}$ Für Strecklagen $(t=s-1)$: $\frac{s \pm \sqrt{s}}{s}$

4. Die harmonische Analyse. Durch die harmonische Analyse der vorliegenden Kurven[1] erhält man *Fourier*-Koeffizienten, die reguläre Funktionen der Gliedlängen sind. Durch Vergleich der *Fourier*-Koeffizienten eines vorgegebenen Geschwindigkeitsgesetzes mit denen des Bewegungsgesetzes eines Gelenkgetriebes lassen sich die erforderlichen Gliedlängenverhältnisse desjenigen Gelenkgetriebes bestimmen, das dem gewünschten Bewegungsverhalten am nächsten kommt.

[1] Die Analyse wurde mit dem harmonischen Analysator nach *Mader-Ott* durchgeführt.

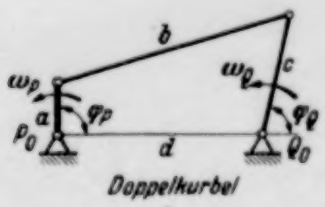
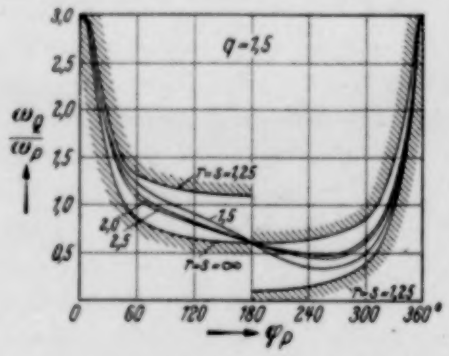
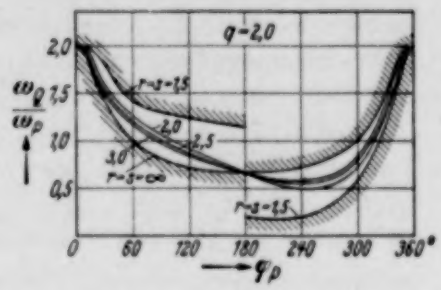
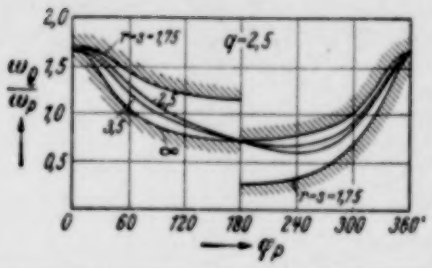
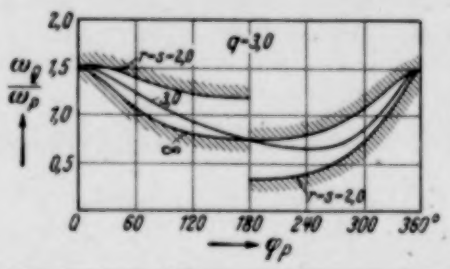
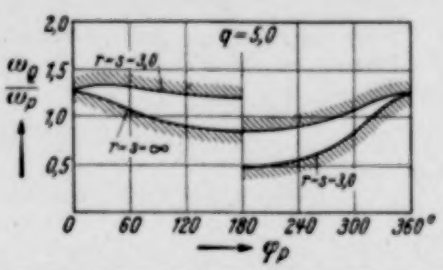
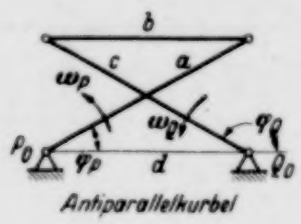
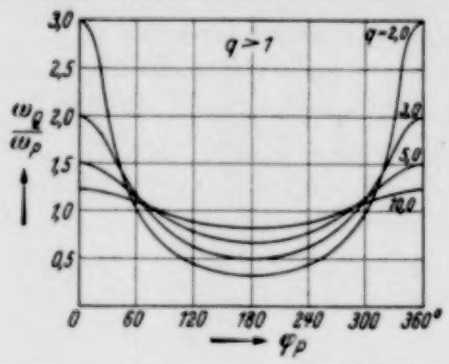
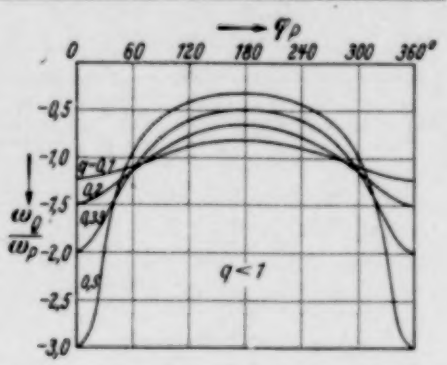
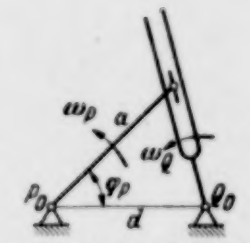
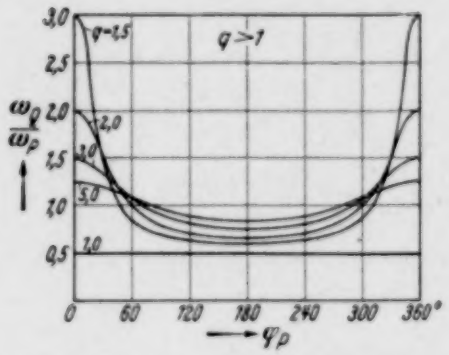
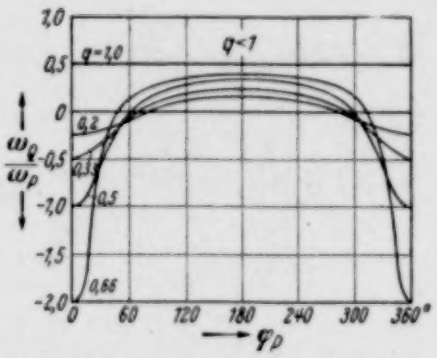
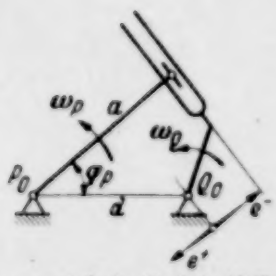
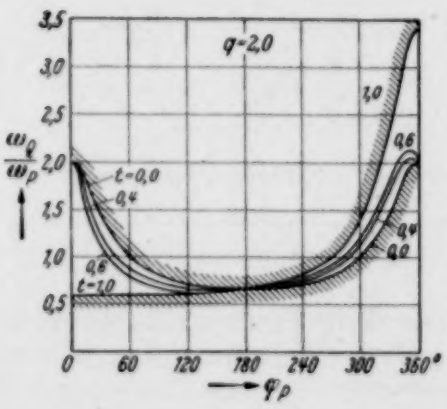
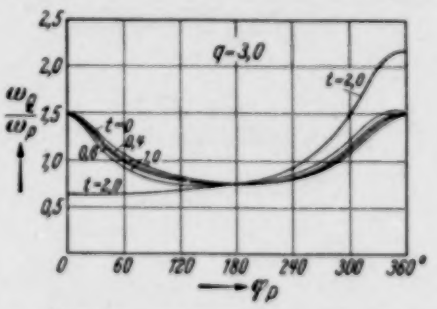
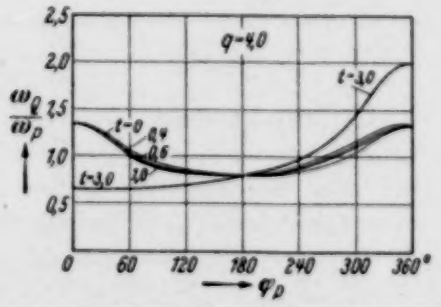
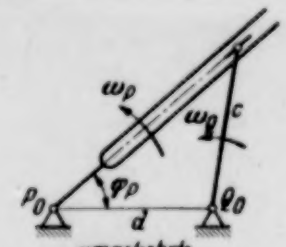
Lfd. Nr.		
1	 Doppelkurbel	 
	  
2	 Antiparallelkurbel	 
3	 zentrische Kurbelschleife	 
4	 exzentrische Kurbelschleife	  

Abb. 4. Graphische Darstellung der Bewegungsgesetze einfacher Gelenkgetriebe (s. a. Tab. 1).

Lfd. Nr.

5



umgekehrte zentrische Kurbelschleife

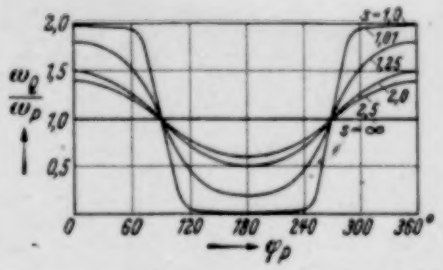
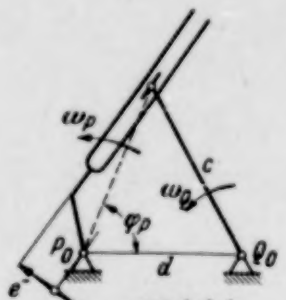
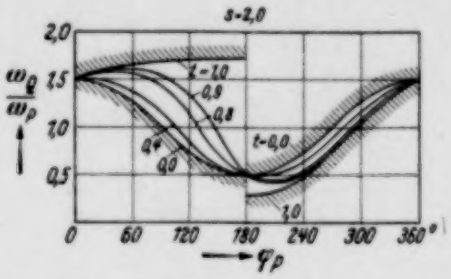


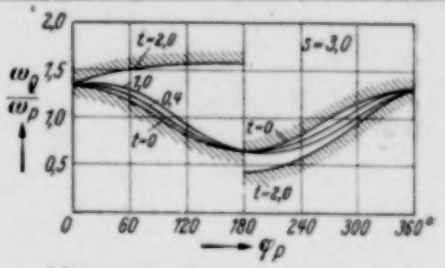
Abb. 4 (Fortsetzung).

6



umgekehrte exzentrische Kurbelschleife





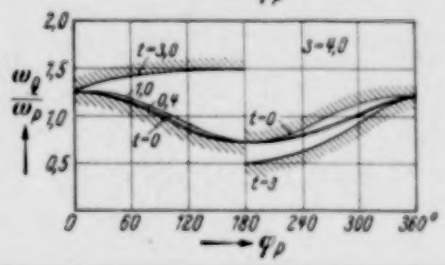


Tabelle 2. *Bewegungsgesetze zusammengesetzter Gelenkgetriebe.*

Erklärungen (s. a. Abb. 5): P_0 = Antrieb, Q_0 = Abtrieb, R_0 = Zwischenlager

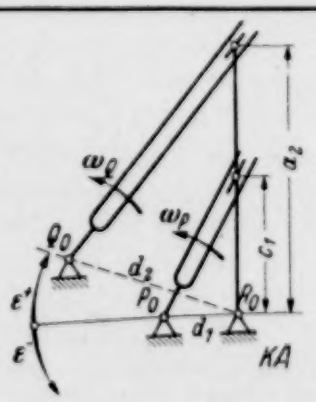
$q_1 = a_1/d_1$, $s_1 = c_1/d_1$ | $q_2 = a_2/d_2$, $s_2 = c_2/d_2$

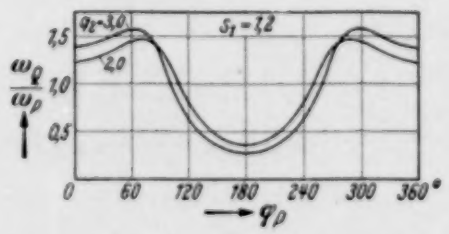
$f_1^2 = q_1^2 + 1 - 2\,q_1 \cos\varphi_P$ | $v_1 = \sqrt{s_1^2 - \sin^2\varphi_P}$

Lfd. Nr. Bzchg.	Bewegungsgesetz	$\left(\frac{\omega_Q}{\omega_P}\right)_{\varphi_P=0^\circ,\,\varepsilon=0^\circ}$	$\left(\frac{\omega_Q}{\omega_P}\right)_{\varphi_P=180^\circ,\,\varepsilon=0^\circ}$
7 KA	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{1 + \frac{\cos\varphi_P}{v_1}}{1 + \frac{s_1/q_2 - \cos\varepsilon/2 + v_1\cos(\varphi_P+\varepsilon) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi_P+\varepsilon)}{s_1 q_2 - \cos\varepsilon/2 + v_1\cos(\varphi_P+\varepsilon) + \frac{1}{2}\cos(2\varphi_P+\varepsilon)}}$	$\frac{q_2}{s_1}\left(\frac{s_1+1}{q_2+1}\right)$	$\frac{q_2}{s_1}\left(\frac{s_1-1}{q_2-1}\right)$
8 KB	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q_1}{f_1^2}\left[\frac{q_1 - \cos\varphi_P}{1 + \frac{f_1/q_2 - \cos\varepsilon + q_1\cos(\varphi_P+\varepsilon)}{f_1 q_2 - \cos\varepsilon + q_1\cos(\varphi_P+\varepsilon)}}\right]$	$\frac{q_1 q_2}{(q_1-1)(q_2+1)}$	$\frac{q_1 q_2}{(q_1+1)(q_2-1)}$
9 KC	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \left(1 + \frac{\cos\varphi_P}{v_1}\right)\cdot\left[1 - \frac{v_1\cos(\varphi_P+\varepsilon) + \frac{1}{2}[\cos(2\varphi_P+\varepsilon) - \cos\varepsilon]}{\sqrt{s_1^2 s_2^2 - [v_1\sin(\varphi_P+\varepsilon) + \frac{1}{2}(\sin(2\varphi_P+\varepsilon) - \sin\varepsilon)]^2}}\right]$	$\frac{(s_1+1)(s_2-1)}{s_1 s_2}$	$\frac{(s_1-1)(s_2+1)}{s_1 s_2}$
10 KD	$\frac{\omega_Q}{\omega_P} = \frac{q_1}{f_1^2}(q_1 - \cos\varphi_P)\cdot\left[1 - \frac{q_1\cos(\varphi_P+\varepsilon) - \cos\varepsilon}{\sqrt{s_2^2 f_1^2 - [q_1\sin(\varphi_P+\varepsilon) - \sin\varepsilon]^2}}\right]$	$\frac{q_1}{s_2}\left(\frac{s_2-1}{q_1-1}\right)$	$\frac{q_1}{s_2}\left(\frac{s_2+1}{q_1-1}\right)$

Lfd. Nr.

7





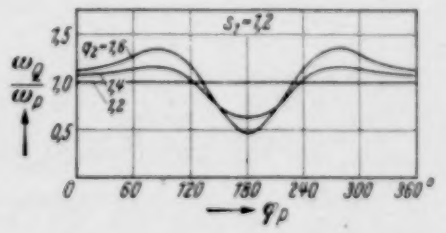
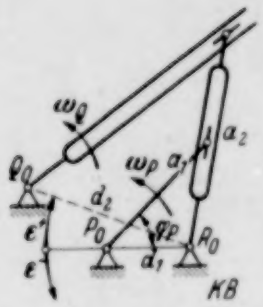
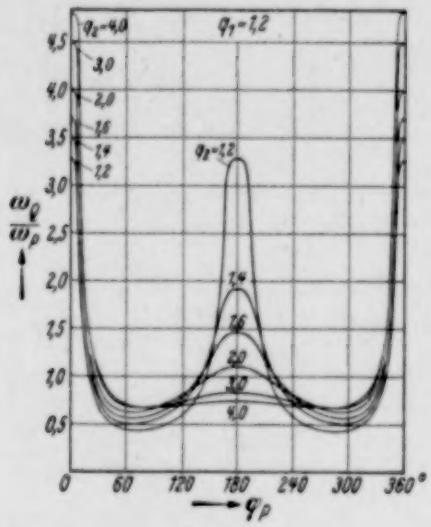
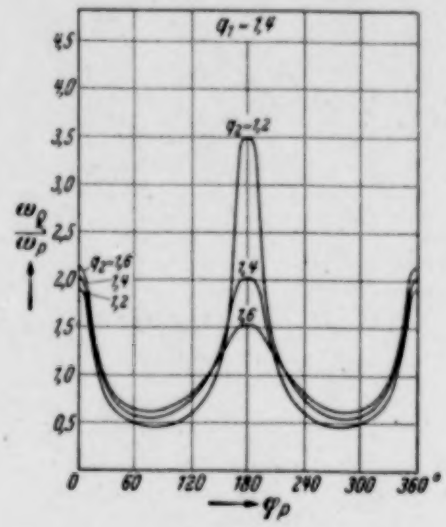
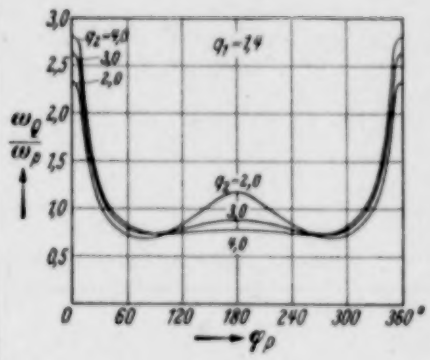
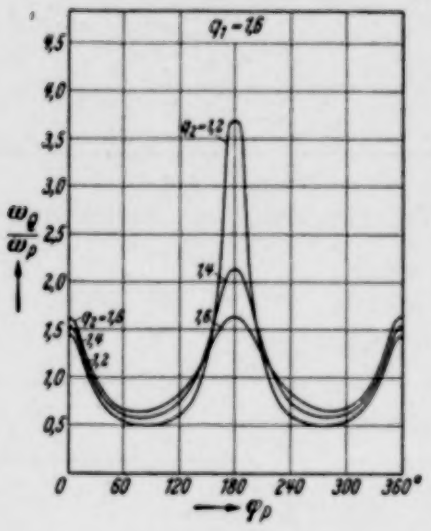
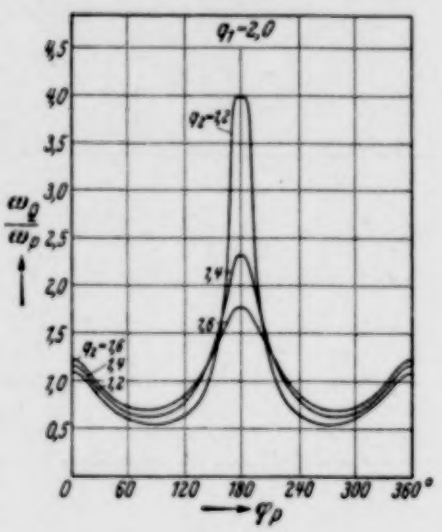
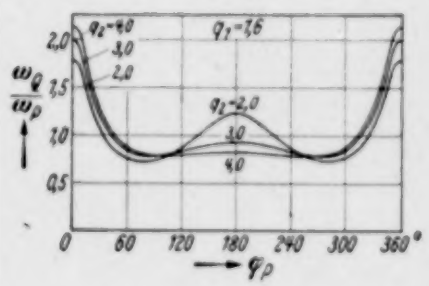
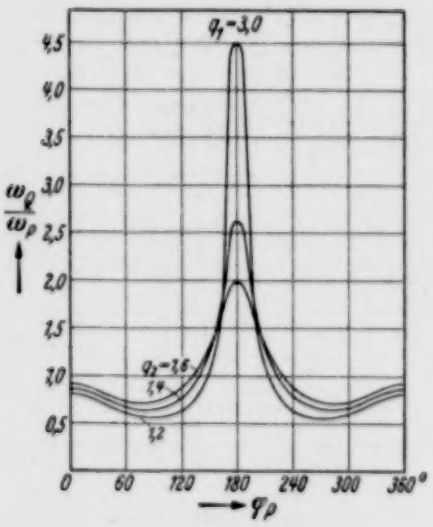
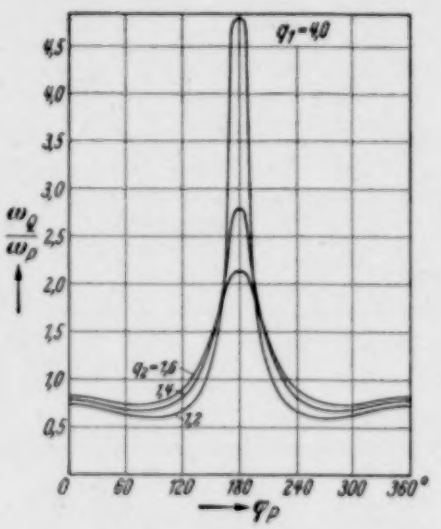
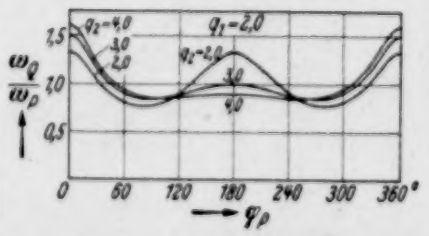
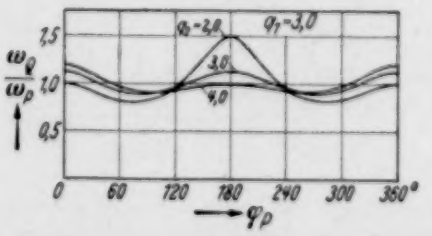
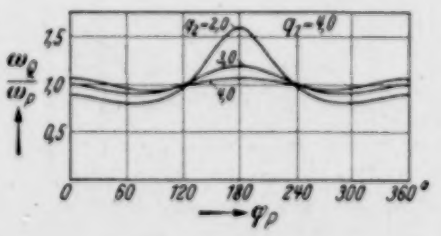


Abb. 5. Graphische Darstellung der Bewegungsgesetze zusammengesetzter Gelenkgetriebe für $\varepsilon = 0°$ (s. a. Tab. 2).

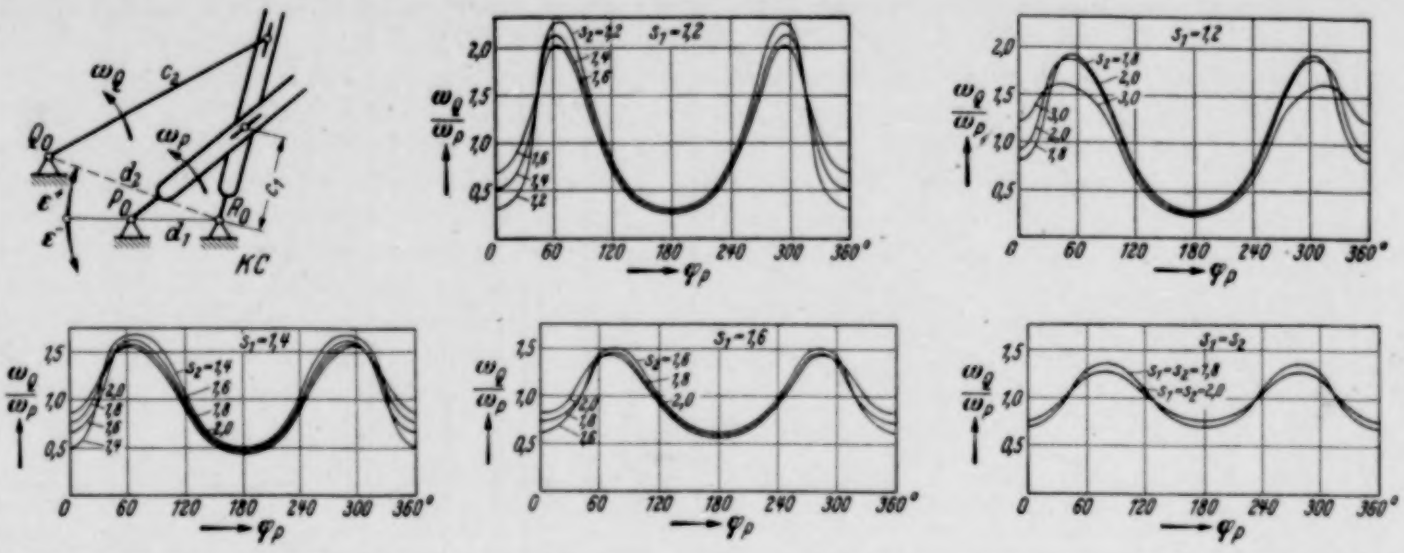
Abb. 5 (Fortsetzung).

lfd. Nr.	
8	           

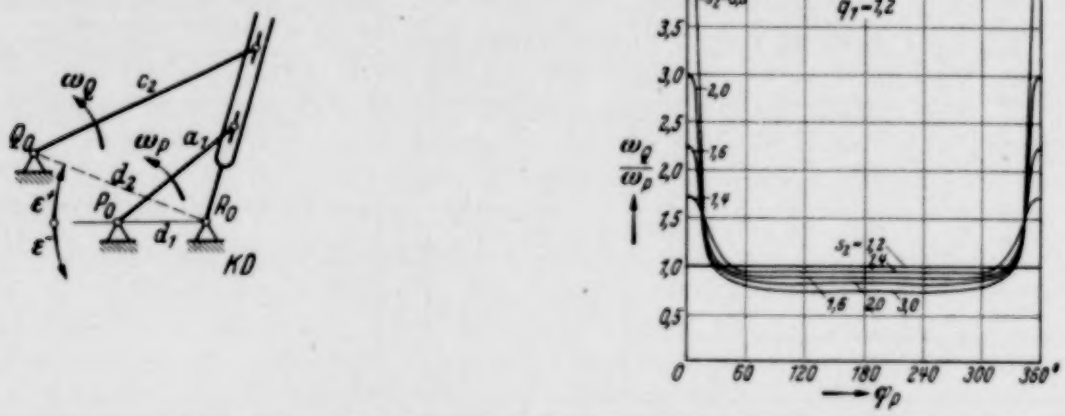
Lfd. Nr.

Abb. 5 (Fortsetzung).

9



10



Das Maß der Übereinstimmung beider Bewegungsgesetze ist begrenzt durch die Tatsache, daß bei zwei veränderlichen Gliedlängen nur zwei *Fourier*-Koeffizienten zur vollkommenen Deckung gebracht werden können und die weiteren nicht mehr frei wählbar sind. Unabhängig hiervon kann in jedem Fall die nichtschwingende Komponente A_0 als Integral-Mittelwert zur Deckung gebracht werden. Zur Bestimmung der Gliedlängen werden in einem Beispiel, dem des gleichförmigen Hin- und Hergangs bei einem Geradschubkurbeltrieb, die Koeffizienten A_1 und A_2 als die größten benutzt. Die Übereinstimmung der Koeffizienten höherer Ordnung läßt ohne weiteres keine maßstäblichen Rückschlüsse auf die Genauigkeit der Verwirklichung des vorgegebenen Geschwindigkeitsgesetzes zu. Es müssen hierzu in

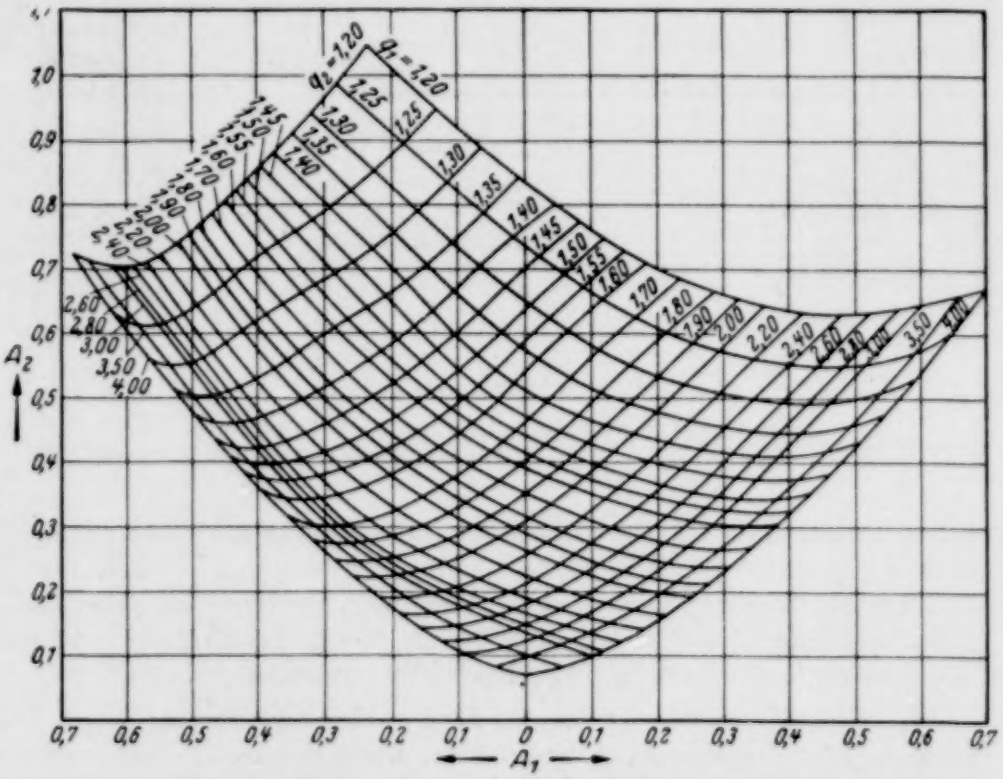
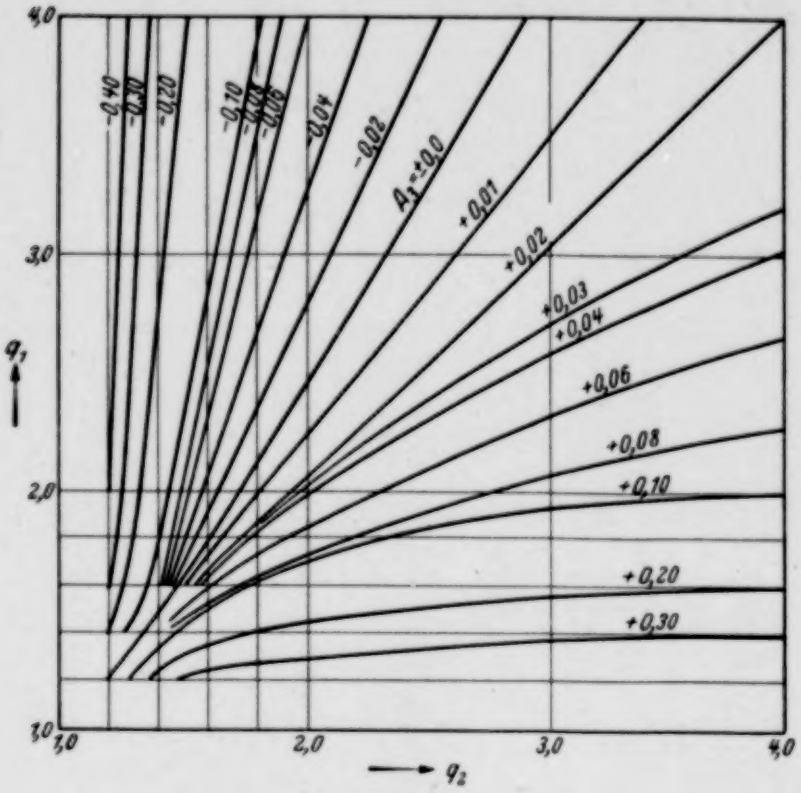
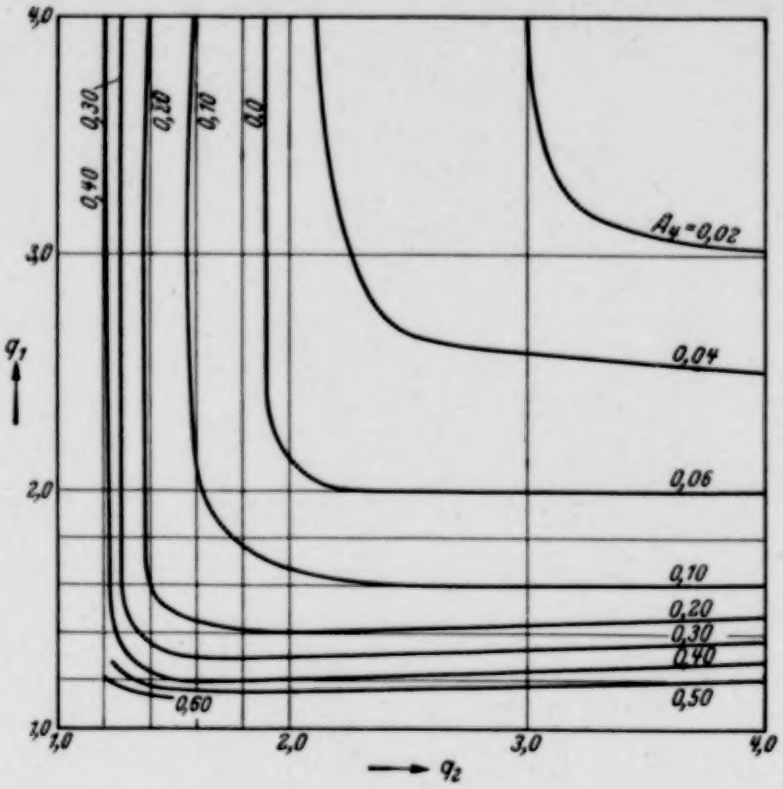
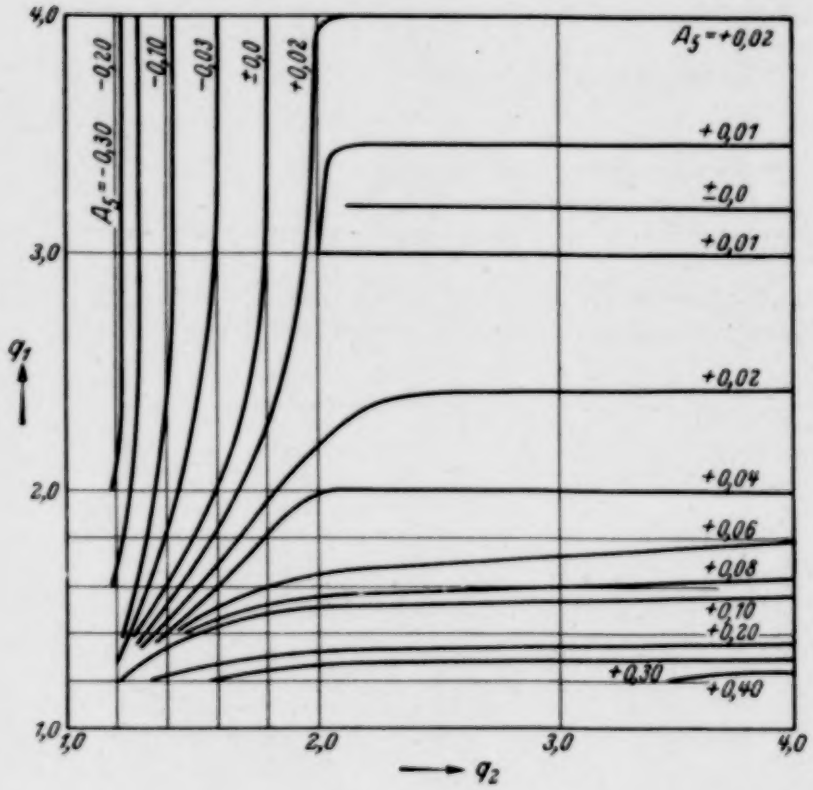


Abb. 6. Die *Fourier*-Koeffizienten A_1 und A_2 des kombinierten Gelenkgetriebes *KB* und ihr Zusammenhang mit den Gliedlängenverhältnissen q_1 und q_2.







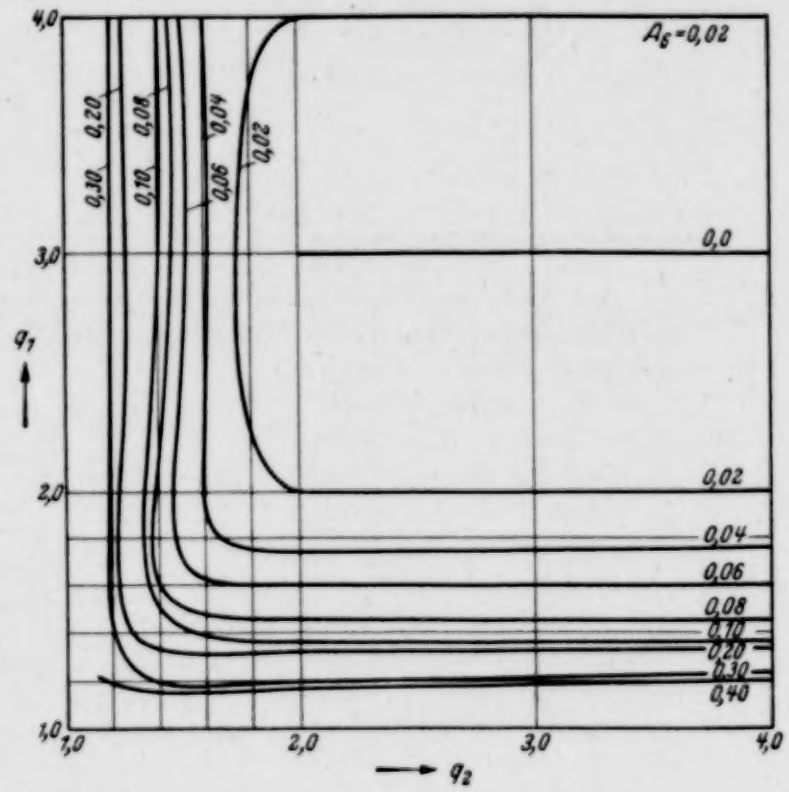


Abb. 7. Die *Fourier*-Koeffizienten A_3 bis A_6 des kombinierten Gelenkgetriebes KB und ihr Zusammenhang mit den Gliedlängenverhältnissen q_1 und q_2.

jedem einzelnen Fall die Differenzen der Funktionswerte über eine Periode errechnet werden. Man kann das vorgegebene Bewegungsgesetz $g(\varphi_p)$ an den Stellen, an denen die exakte Verwirklichung weniger wichtig erscheint, der Getriebecharakteristik $f(\varphi_p)$ anpassen und so eine noch genauere Übereinstimmung durch Wiederholung der harmonischen Analyse und die Bestimmung neuer Gliedlängenverhältnisse erreichen.

Bei der Begrenzung der Anzahl der *Fourier*-Koeffizienten, d. h. bei der Feststellung der höchsten Ordnung der trigonometrischen Reihe, nach der diese abgebrochen wird, wie dies an dem kombinierten Getriebe KB als Beispiel gezeigt wird, sind zwei Gesichtspunkte von Bedeutung, die sich im wesentlichen decken. Einmal mußte berücksichtigt werden, daß *Fourier*beiwerte, deren

Größe in die Nähe der Fehlertoleranz des verwendeten Instrumentes fallen ($\pm 0{,}006$ cm), keine praktische Bedeutung mehr besitzen, zum andern, daß die Restglieder der Reihe einer gewissen Konvergenzbedingung genügen. In engem Zusammenhang damit mußten auch die Variationsbereiche der Gliedlängen bzw. ihrer Ersatzgrößen eingegrenzt werden. Dabei zeigt sich, daß in gewissen Variationsbereichen der Gliedlängen sehr wohl noch relativ große *Fourier*-Koeffizienten höherer Ordnung vorhanden sein können, während diese in einem stetig sich anschließenden Gebiet verschwinden. Wesentlich ist die Tatsache, daß die Werte höherer *Fourier*-Koeffizienten sich in dem betrachteten Variationsbereich stetig dem Werte Null nähern oder doch wenigstens in seiner Nähe bleiben. Dies gilt in dem Variationsbereich von $q_1 > 2$ oder $q_2 > 2$ genauer als bei kleineren Werten für q_1 und q_2. Es ist ferner zu erwarten, daß die für $q_1 = 4$ oder $q_2 = 4$ beobachtete Konvergenz der Koeffizienten gegen 0 in dem sich anschließenden, nicht mehr untersuchten Variationsbereich $q_1 > 4$ oder $q_2 > 4$ erhalten bleibt, wobei die absoluten Werte der Koeffizienten mit größer werdendem q_1 oder q_2 abnehmen, höhere Koeffizienten also immer mehr gegen 0 gehen.

Von maßgebender Bedeutung bleiben in allen Bereichen die *Fourier*-Koeffizienten A_1 und A_2, deren absolute Summe in den untersuchten Fällen größer ist als die Summe irgend zweier Koeffizienten höherer Ordnung.

Bei Berücksichtigung dieser Überlegungen und auf Grund der Einsicht, daß bei der vorhandenen Vielfalt der Veränderlichen eine eindeutige mathematische Konvergenzbedingung nicht gegeben werden kann, wird die Konvergenz der Restglieder in unserem Fall als gesichert angesehen, wenn man die *Fourier*reihe nach der sechsten Ordnung abbricht. In Abb. 6 sind daher die Gliedlängen q_1 und q_2 als zwei sich durchdringende Kurvenscharen in Abhängigkeit von A_1 und A_2 dargestellt. Abb. 7 enthält die Koeffizienten A_3 bis A_6 jeweils als Funktion der im $A_1\,A_2$-Diagramm festgelegten Gliedlängen q_1 und q_2. Mit Hilfe dieser Diagramme lassen sich die Differenzen der Koeffizienten zwischen $g(q_p)$ und $f(q_p)$ bestimmen.

Hat ein zu verwirklichendes Bewegungsgesetz nach überschläglichem Vergleich Ähnlichkeit mit der Getriebecharakteristik der Kurbelschleife, dann zeichnet man dieses Bewegungsgesetz zunächst wieder so um, daß der Integralmittelwert und damit A_0 gleich 1 wird. Nach der harmonischen Analyse der ersten Ordnung kann man den Koeffizienten A_1 schon jetzt zur Deckung mit der Getriebecharakteristik bringen und erkennt, ob weitere Koeffizienten noch relativ groß sind. Ist dies der Fall, dann kann man nach deren Ermittlung auch diese Werte in das Diagramm in Abb. 8 eintragen. Ihre Abszissen schließen ein Variationsintervall von q ein, innerhalb dessen ein Getriebe liegt, das die gestellte Forderung am genauesten verwirklicht. Dieses wird um so näher an der durch A_1 gegebenen Grenzen liegen, je größer A_1 im Vergleich zu den übrigen Koeffizienten ist.

Erst ein rechnerischer oder graphischer Vergleich der gestellten Forderung mit der Getriebecharakteristik des geschätzten Getriebes, das innerhalb des durch maßgebende Koeffizienten gegebenen Intervalls liegt, gibt Aufschluß über die maßstäbliche Genauigkeit der Übereinstimmung.

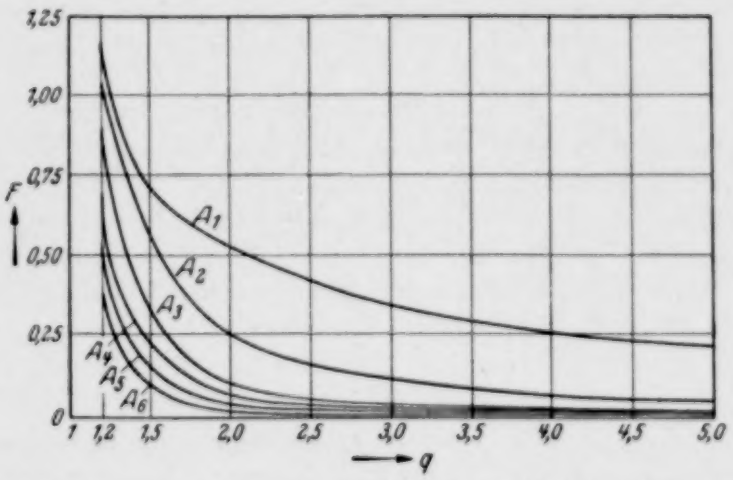


Abb. 8. *Fourier*-Koeffizienten der rotierenden Kurbelschleife in Abhängigkeit vom Gliedlängenverhältnis $q > 1$.

5. Die Erzeugung gleichförmigen Hin- und Herganges als Beispiel. Während die Ableitung einer geradlinigen hin und her gehenden Bewegung von einer gleichförmigen Drehung z. B. mittels eines Geradeschubkurbeltriebes keine Schwierigkeiten macht, sobald der sinusförmige Charakter dieser abgeleiteten Bewegung erwünscht ist oder zum mindesten nicht störend wirkt, erfordert die Umformung in einen gleichförmigen Hin- und Hergang besondere Maßnahmen.

Gleichförmiger Hin- und Hergang kann erzeugt werden durch Kurventriebe, Zahnradtriebe mit kreisrunden Rädern, Spindel- oder Schraubentriebe, Zahntriebe mit unrunden Rädern, Gelenkgetriebe (Koppeltriebe, Kurbelschleifen).

Kurventriebe können geforderte Bewegungsgesetze mathematisch genau erfüllen. Das hier zu behandelnde Bewegungsgesetz wird durch die archimedische Spirale verwirklicht. Werden zwei

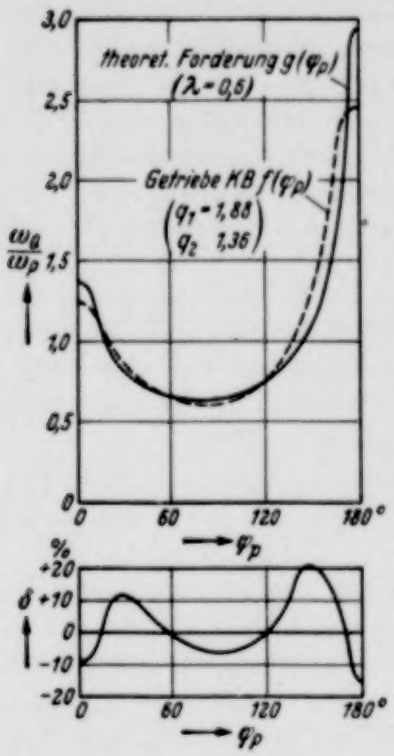


Abb. 9. Die Abweichung der Getriebecharakteristik $f(\varphi_p)$ des kombinierten Gelenkgetriebes KB von der theoretischen Forderung $g(\varphi_p)$ beim Beispiel des gleichförmigen Hin- und Herganges.

spiegelbildliche Äste zusammengesetzt, dann erhält man die bekannte Herzkurve[1]. Diese Getriebe besitzen ungünstige Betriebsverhältnisse, da sich das ursprüngliche Bewegungsgesetz durch natürliche Abnutzung allmählich verändert.

Bei Mangeltrieben, Schnellpressen und ähnlichen Maschinen werden Getriebe verwendet, deren Elemente Zahnrad und Zahnstange sind. Bei der Bewegungsumkehr treten meist unerwünschte Stöße auf.

Spindel- oder Schraubentriebe werden benutzt, wenn langsame Vorschübe eingestellt werden müssen. Sie weisen als besonderen Nachteil ungünstige Reibungsverhältnisse auf.

Zahnradtriebe mit unrunden Rändern vermeiden durch die Eigenart ihrer Konstruktionselemente die Nachteile der anderen Getriebe, wie Veränderung des Bewegungsgesetzes, mangelnde Stoßfreiheit und schlechte Reibungsverhältnisse. Andererseits bieten sie erhebliche Schwierigkeiten in Konstruktion und Fertigung.

Es liegt daher nahe, ein Gelenkgetriebe (zusammengesetztes Getriebe KB) zu benutzen, wobei die vorgeschlagene Methode zur Bestimmung der Gliedlängen benutzt wird. Nach der mathematischen Formulierung der theoretischen Forderung $g(\varphi_p)$ geht man mit den erhaltenen *Fourier*-Koeffizienten A_1 und A_2 in das Diagramm Abb. 6 und erhält die Gliedlängen $q_1 = 1{,}88$, $q_2 = 1{,}36$ eines Getriebes KB mit dem Bewegungsverhalten $f(\varphi_p)$.

In acht Punkten einer Periode herrscht volle Übereinstimmung beider Kurven. Die Abweichungen in der Nähe der Umkehrstellen haben keine praktische Bedeutung, da dort die theoretische

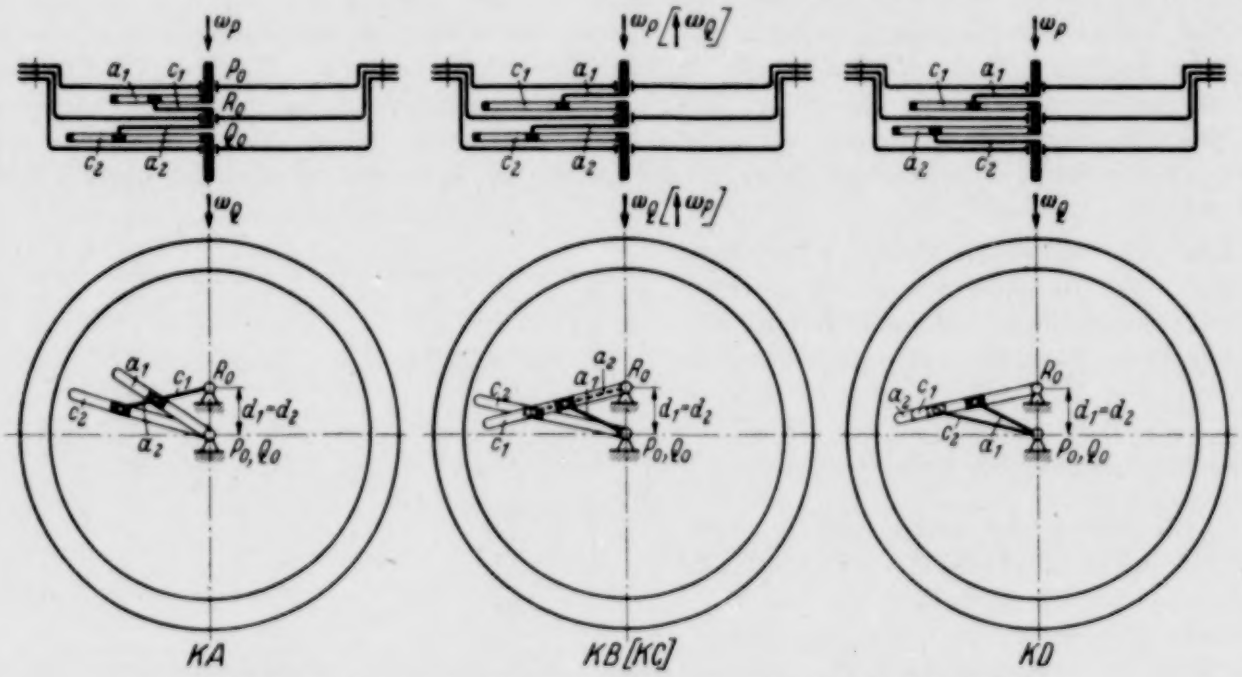


Abb. 10. Konstruktive Vorschläge für zusammengesetzte Gelenkgetriebe (schematisch).

Forderung willkürlich angegeben ist. Durch Anpassung der geforderten Kurve an die Getriebecharakteristik in den Umkehrbereichen und Erhaltung des Integralmittelwertes gleich 1 und nochmalige harmonische Analyse läßt sich nach dieser Methode die Übereinstimmung noch verbessern. Die Abweichung im mittleren Teil der Kurven von $\varphi_p = 45°$ bis $130°$ bleibt kleiner als 6,2% (vgl. Abb. 9). Dies entspricht einer Hubstrecke von etwa 53%.

6. Konstruktive Ausführungsvorschläge. Die kombinierten Getriebe verdienen bei der Konstruktion besondere Beachtung wegen der Freiläufigkeit der einzelnen Glieder. Die Lager sind

[1] AWF. (Ausschuß für wirtschaftliche Fertigung), Eine Sammlung von Getrieben und Getriebemodellen (1928).

genügend hoch zu setzen, damit die einzelnen Glieder frei durchschlagen können. Am Zwischenglied kann man in den meisten Fällen An- und Abtrieb nicht auf der gleichen Seite angreifen lassen. Die Lagerung des Zwischengliedes muß daher so vorgenommen werden, wie es in Abb. 10 gezeigt ist. Das Zwischenglied ist der Länge nach in zwei parallellaufende Stücke geteilt, die durch die Achse R_0 starr miteinander verbunden sind. Diese Methode läßt sich bei allen vier kombinierten Getrieben anwenden. Für das Getriebe KC kann man die Bilder des Getriebes KB übernehmen, wenn man die Indizes und die Richtung der Bewegungsübertragung vertauscht.

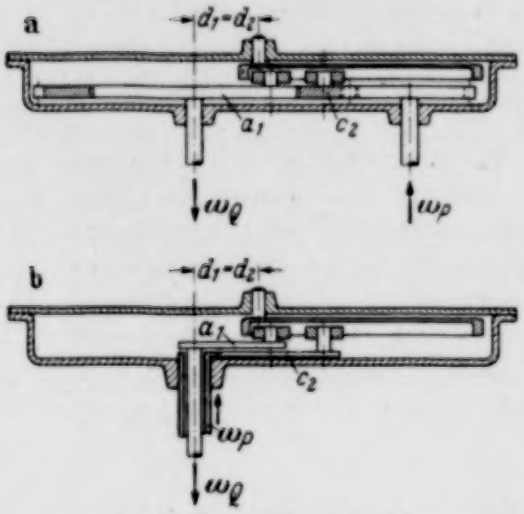


Abb. 11. Das zusammengesetzte Gelenkgetriebe KD.

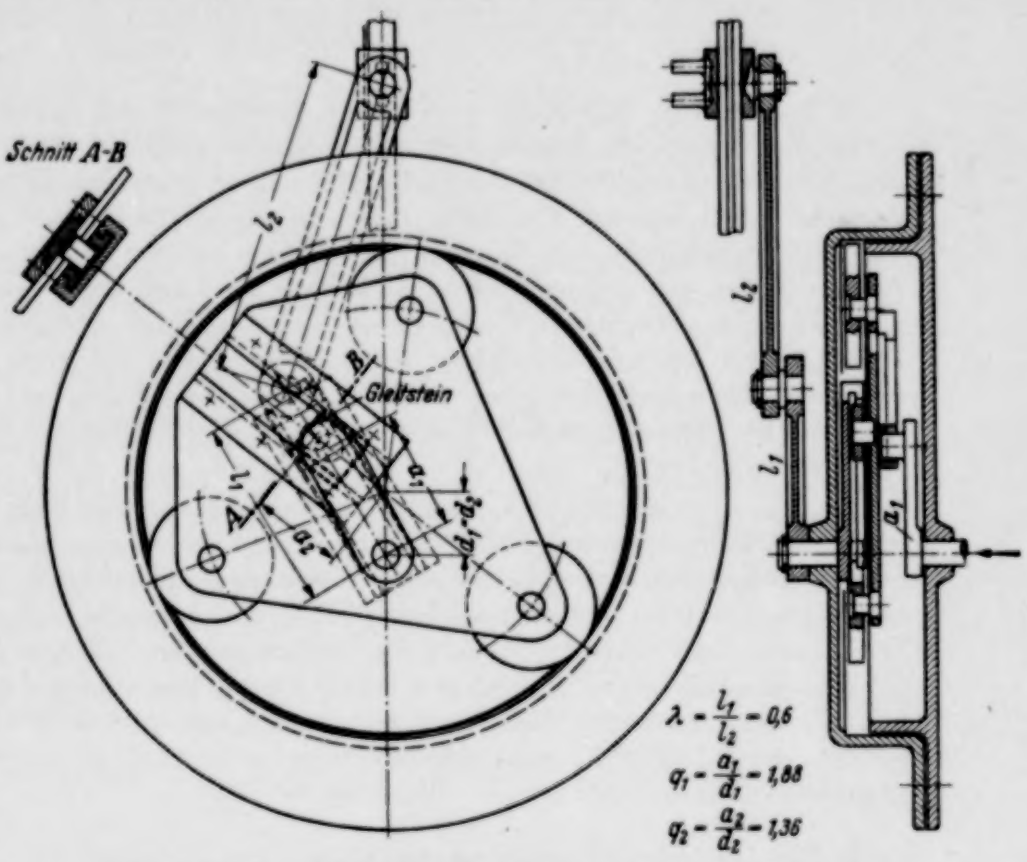


Abb. 12. Seilführungstrieb; Hintereinanderschaltung von Geradschubkurbeltrieb und kombiniertem Getriebe KB. (Kulissen im Seitenriß längs geschnitten.)

Bringt man die Lager in Deckeln an, dann vermeidet man hohe Lagerböcke und erhöht durch eine solche Abstützung am ganzen Umfang die Festigkeit der Lager. Darüber hinaus dienen diese Lagerdeckel als Gehäuse zur Kapselung des Getriebes. Diese Deckel tragen Ringflansche zur Befestigung des Getriebes an anderen Maschinenteilen. Für das Getriebe KD sind in Abb. 11 noch zwei Möglichkeiten gezeigt, falls An- und Abtrieb auf der gleichen Seite erfolgen sollen. Bei Abb. 11a ist durch die Bewegungsübertragung mittels Zahnräder zugleich die Möglichkeit gegeben, eine erwünschte Untersetzung ohne zusätzliches Vorschaltgetriebe zu verwirklichen.

Eine andere Möglichkeit der Lagerung des Zwischengliedes ist beispielsweise in Abb. 12 für das kombinierte Getriebe KB als Seilführungstrieb gezeigt. An die Stelle der Zapfenlagerung des Zwischengliedes, die zu Verdrillungen und Drehschwingungen Anlaß geben könnte, tritt eine Lagerung am Umfang des zu einer Scheibe erweiterten Zwischengliedes. Drei Punkte, am Umfang der Scheibe, mit Rollen versehen, gewährleisten einmal einen zentrischen Lauf und verhindern zum anderen allzu hohen Reibungswiderstand. Dieses Getriebe dient in Verbindung mit einem Geradschubkurbeltrieb als Seilführungstrieb und verwirklicht annähernd die Forderung nach einer gleichförmig hin und her gehenden Bewegung des Seilführungssupportes.

7. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wird eine Methode beschrieben, die es gestattet, mit Hilfe von speziellen Gelenkgetrieben bestimmte vorgegebene Geschwindigkeitsgesetze zu verwirklichen. Der unmittelbare Anlaß zu dieser Untersuchung war der Wunsch, Kurvengetriebe und unrunde Zahnräder, die im allgemeinen zur Erzeugung bestimmter Bewegungsgesetze verwendet werden, durch die konstruktiv und betriebstechnisch günstigeren Gelenkgetriebe zu ersetzen. Als besonders geeignet für diesen Zweck erwies sich die Hintereinanderschaltung zweier ebener, umlaufender Kurbelschleifen. Durch Vergleich der *Fourier*-Koeffizienten eines vorgegebenen Geschwindigkeitsgesetzes mit denen des Bewegungsgesetzes eines Gelenkgetriebes lassen sich die erforderlichen Gliedlängenverhältnisse bestimmen.

(Eingegangen am 13. Mai 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Kurt Bach*, (22a) Düsseldorf, Suitbertusstraße (Firma Rheinkälte Maschinenfabrik).

Ein Beitrag zur Loveschen Verschiebungsfunktion*.

Von H. Jung.

1. Einleitung. Wie *Love*[1] gezeigt hat, lassen sich die Spannungen und Dehnungen bei einem rotationssymmetrisch gestalteten und rotationssymmetrisch belasteten Körper aus Bipotentialfunktionen Φ herleiten ($\Delta\Delta\Phi=0$). In zahlreichen Arbeiten sind seitdem Einzelfälle dieses Problems der Elastizität behandelt worden. Insbesondere ist *Marguerre*[2] in der Weise vorgegangen, daß er partikuläre Integrale der Bipotentialgleichung benützt, die einen Parameter enthalten, und zur Anpassung an die vorgeschriebene Belastung noch mit einer geeigneten Parameterfunktion multipliziert. Dieser fruchtbare Gedanke wird im folgenden dadurch weitergeführt, daß die mit willkürlichen Funktionen des Parameters multiplizierten Integrale in geeigneter Weise aufsummiert und dann über den Parameter integriert werden. So gelingt es, eine Reihe bisher nicht erledigter technischer Probleme erstmals zu lösen oder schon bekannte Lösungen zu vereinfachen und zu erweitern.

Im folgenden werden zuerst noch einmal die bekannten Formeln für die *Love*sche Verschiebungsfunktion zusammengestellt (Ziff. 2). Dann wird die allgemeine Lösung für den elastischen Halbraum bei beliebiger vorgeschriebener rotationssymmetrischer Normalbelastung oder Normalverschiebung der Oberfläche angegeben (Ziff. 3 und 4), ferner für die im Unendlichen gestützte beliebig belastete Platte (Ziff. 5) und die für den unendlich langen Kreiszylinder mit Radialbelastung (Ziff. 6). Es folgt der Zylinder mit beliebig vorgeschriebener Normalverschiebung der Stirnfläche (Ziff. 7), das *Hertz*sche Problem der starren Kugel auf dem elastischen Halbraum, ebenfalls in neuer Fassung (Ziff. 8), und schließlich die unendlich ausgedehnte Platte unter einem Gleichgewichtssystem auf ihrer einen Oberfläche (Ziff. 9).

2. Die Lovesche Verschiebungsfunktion. Im folgenden ist σ_r die Normalspannung in radialer Richtung, σ_φ die Ringspannung, σ_z die Normalspannung in der z-Richtung, τ die Tangentialspannung in der r- und z-Richtung, u die Verschiebung in der r-Richtung, w die Verschiebung in der z-Richtung. Ist ein rotationssymmetrischer Verschiebungszustand vorgegeben, so lassen sich die Verschiebungen und Spannungen aus einer von *Love* angegebenen Funktion Φ ableiten[3]. Die Funktion Φ ist ein partikuläres Integral der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta\Phi=0\,, \tag{1}$$

wobei

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1a}$$

sei. Damit werden die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{m}{m-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}\,,\\
w &= 2\frac{m-1}{m-2}\Delta\Phi-\frac{m}{m-2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\,,\\
\sigma_r &= \frac{2G}{m-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-m\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),\\
\sigma_\varphi &= \frac{2G}{m-2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-\frac{m}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),\\
\sigma_z &= \frac{2(2m-1)}{m-2}G\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta\Phi-\frac{m}{2m-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),\\
\tau &= \frac{2(m-1)}{m-2}G\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\Phi-\frac{m}{m-1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

* Auszug aus der Stuttgarter Dissertation des Verfassers (1948; Berichter: Prof. *Grammel*; Mitberichter: Prof. *Baier*).

[1] *E. H. Love*, Lehrbuch der Elastizität (deutsch v. *A. Timpe*), S. 317. Leipzig 1907.

[2] *K. Marguerre*, Ing.-Arch. 4 (1933), S. 332.

[3] S. z. B. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 35 ff. und S. 107 ff. Berlin 1939.

Mit den für unsere Zwecke brauchbaren partikulären Integralen[1] der Differentialgleichung (1)

$$\Phi_1 = e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r), \qquad \Phi_2 = z e^{\pm \lambda z} J_0(\lambda r), \qquad \Phi_3 = r e^{\pm \lambda z} J_1(\lambda r) \tag{3}$$

läßt sich eine Lösung in der Form aufbauen

$$\Phi = \sum_{n=1}^{n=k} \int_0^\infty A_n(\lambda)\, \Phi_n(\lambda r, z)\, d\lambda\,, \tag{4}$$

worin die $A_n(\lambda)$ noch offene Funktionen des Parameters λ sind. Die Integration über den ganzen Bereich des Parameters λ ist der entscheidende Gedanke dieser Methode. Die Funktionen Φ_i sind im einzelnen Fall so auszuwählen, daß die Randbedingungen möglichst einfach befriedigt werden können.

3. Die Spannungen und Verschiebungen des elastischen Halbraums bei vorgegebener rotationssymmetrischer Normalbelastung. Der elastische isotrope Halbraum werde in seiner Oberfläche $z=0$ durch einen beliebigen rotationssymmetrischen Normaldruck belastet (Abb. 1). Für diesen Belastungsfall hat schon *C. Weber*[2] eine Lösung angegeben. Er berechnet die Spannungsfunktion für den rotationssymmetrischen Belastungsfall aus der ebenen Spannungsfunktion und erhält durch Rotation der Belastungsfunktion $p(r)$ um ihre Symmetrieachse und Integration über die gesamte Belastung der Oberfläche $z=0$ die Spannungsfunktion für den rotationssymmetrischen Belastungsfall. Es soll nun gezeigt werden, wie sich die Verschiebungsfunktion für diesen Belastungsfall einfacher ermitteln läßt.

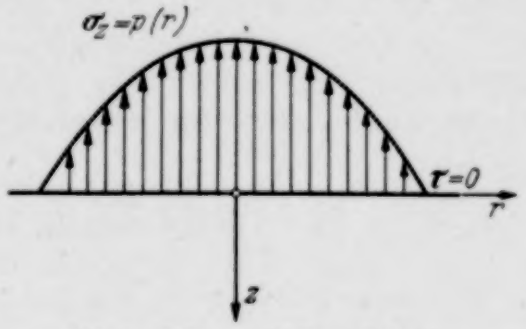


Abb. 1. Halbraum mit Normalbelastung.

Entsprechend (4) wird die Verschiebungsfunktion für den elastischen Halbraum angesetzt in der Form

$$\Phi = \int_0^\infty \left[A(\lambda) + z\,B(\lambda)\right] e^{-\lambda z}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda\,. \tag{5}$$

Geht man mit (5) in (2) ein, so erhält man die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{m}{m-2} \int_0^\infty \left\{\lambda\left[A(\lambda) + z\,B(\lambda)\right] - B(\lambda)\right\} \lambda e^{-\lambda z}\, J_1(\lambda r)\, d\lambda\,,\\
w &= -\frac{1}{m-2} \int_0^\infty \left\{4(m-1)\,B(\lambda) + m\left[\lambda\left(A(\lambda) + z\,B(\lambda)\right) - 2\,B(\lambda)\right]\right\} \lambda e^{-\lambda z}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda\,,\\
\sigma_z &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \left\{(m-2)\,\lambda^2 B(\lambda) + m\lambda^3\left[A(\lambda) + z\,B(\lambda)\right]\right\} e^{-\lambda z}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda\,,\\
\tau &= \frac{2G}{m-2} \int_0^\infty \left\{-2\lambda^2 B(\lambda) + m\lambda^3\left[A(\lambda) + z\,B(\lambda)\right]\right\} e^{-\lambda z}\, J_1(\lambda r)\, d\lambda\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Die Randbedingungen für diesen Belastungsfall sind

$$\tau = 0 \qquad \text{für} \quad z = 0\,, \tag{7}$$

$$\sigma_z = p(r) \qquad \text{für} \quad z = 0\,. \tag{8}$$

Hierbei ist $p(r)$ die durch den Normaldruck hervorgerufene Spannung in der z-Richtung. Die Funktionen $A(\lambda)$ und $B(\lambda)$ sind so zu bestimmen, daß die Randbedingungen (7) und (8) befriedigt werden. Die Randbedingung (7) läßt sich durch

$$A(\lambda) = \frac{2}{m\lambda}\, B(\lambda) \tag{9}$$

erfüllen.

---

[1] Die Besselfunktionen erster Art können jeweils durch die Besselfunktionen zweiter Art ersetzt werden.

[2] *C. Weber*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 117.

Damit ergibt sich statt (6)

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{m}{m-2}\int_0^\infty \left[\lambda\left(\frac{2}{m\lambda}+z\right)-1\right]\lambda B(\lambda)e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\,d\lambda\,,\\ w &= -\frac{1}{m-2}\int_0^\infty \left[2(m-1)+m\lambda z\right]\lambda B(\lambda)\,e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\lambda,\\ \sigma_z &= \frac{2Gm}{m-2}\int_0^\infty (1+\lambda z)\,\lambda^2 B(\lambda)\,e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\lambda,\\ \tau &= \frac{2Gm}{m-2}\int_0^\infty z\lambda^3 B(\lambda)\,e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\,d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Die Randbedingung (8) führt auf die Integralgleichung zur Bestimmung der Funktion $B(\lambda)$

$$p(r)=\frac{2Gm}{m-2}\int_0^\infty B(\lambda)\lambda^2 J_0(\lambda r)\,d\lambda\,. \tag{11}$$

Die Lösung dieser Integralgleichung kann durch die Hankeltransformation[1] geleistet werden. Es ist

$$f(r)=\int_0^\infty g(\xi)\,\xi J_0(\xi r)\,d\xi\,,\qquad g(\xi)=\int_0^\infty f(r)\,r J_0(\xi r)\,dr\,.$$

Zusammengefaßt erhält man

$$f(r)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\mu)\mu J_0(\xi\mu)\,\xi J_0(\xi r)\,d\xi\,d\mu\,. \tag{12}$$

Vergleicht man (11) mit (12), so kommt

$$B(\lambda)=\frac{m-2}{2Gm}\,\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\,d\xi \tag{13}$$

und damit nach (9)

$$A(\lambda)=\frac{m-2}{Gm^2\lambda^2}\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\,d\xi\,. \tag{14}$$

Setzt man die Ausdrücke (13) und (14) in (5) ein, so lautet die Verschiebungsfunktion

$$\Phi=\frac{m-2}{2Gm}\int_0^\infty\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\left(\frac{2}{m\lambda^2}+\frac{z}{\lambda}\right)e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\xi\,d\lambda\,. \tag{15}$$

Das Integral (15) konvergiert gleichmäßig, wenn die Belastung den hinreichenden Bedingungen

$$\left|\int_0^\infty p(\xi)\,\xi\,d\xi\right|<K\,,\qquad \left|p(\xi)\,\xi\right|<L$$

genügt. Damit werden die Verschiebungen und Spannungen

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2G}\int_0^\infty\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\left[\left(\frac{2}{m\lambda}+z\right)\lambda-1\right]e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\,d\xi\,d\lambda\,,\\ w &= -\frac{1}{2Gm}\int_0^\infty\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\left[2(m-1)+m\lambda z\right]e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\xi\,d\lambda\,,\\ \sigma_z &= \int_0^\infty\int_0^\infty p(\xi)\,\xi J_0(\lambda\xi)\,(1+\lambda z)\,\lambda e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\xi\,d\lambda\,,\\ \tau &= \int_0^\infty\int_0^\infty p(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,z\lambda^2 e^{-\lambda z}J_1(\lambda r)\,d\xi\,d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

---

[1] *W. Magnus* und *F. Oberhettinger*, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der Mathematik und Physik, 2. Aufl., S. 183. Berlin 1948. Im folgenden mit M.-O. zitiert.

Ist die Belastungsfunktion $p(r)$ in Form eines Polynoms gegeben, so ist die Darstellungsart durch (15) nicht immer zweckmäßig. Vielmehr wird dann auch die Funktion $B(\lambda)$ in Form einer Reihe angesetzt, die für manche Probleme einfacher und schneller zu brauchbaren Ergebnissen führt, nämlich als Summe von Besselfunktionen:

$$B(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n J_{2n+1}(a\lambda) \,. \tag{17}$$

Aus der vorletzten Gleichung (10) erhält man die Beziehung zur Erfüllung der Randbedingung (8)

$$p(r) = \frac{2Gm}{m-2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n \int_0^\infty J_{2n+1}(a\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda \,. \tag{18}$$

Die in (18) auftretenden Integrale lassen sich auswerten[1]. Nach kurzer Rechnung erhält man

$$\left.\begin{aligned} p(r) &= \frac{2Gm}{a(m-2)} \left[\alpha_0 + \alpha_1 \left(1 - 2\,\frac{r^2}{a^2}\right) + \cdots\right] \quad \text{für } r \leqq a \\ &= 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{für } r > a \,. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Aus (19) können die Koeffizienten α_n durch einen Koeffizientenvergleich sofort berechnet werden. Sind die α_n bekannt, so geht man mit (17) in (9) ein und erhält die Verschiebungen und Spannungen in Form von Polynomen.

Ist an Stelle der Normalbelastung eine allgemeine, nur von r abhängige Belastung mit Normal- und Tangentialkomponente vorgeschrieben, so können die Funktionen $A(\lambda)$ und $B(\lambda$ für die Tangentialkomponente auf demselben Weg gefunden werden wie für die Normalkomponente.

Die Einschränkung im Ansatz (17), daß man nur eine endliche Summe ansetzt, ist für die praktische Durchrechnung von Problemen ohne Bedeutung; denn jede Belastungsfunktion $p(r)$ kann mit ausreichender Näherung in Form einer endlichen Summe dargestellt werden.

4. Die Spannungen und Verschiebungen des elastischen Halbraums bei vorgegebener rotationssymmetrischer Normalverschiebung der Oberfläche. Werden im Bereich $r \leqq a$ an der Oberfläche des elastischen Halbraums die Verschiebungen in der z-Richtung vorgeschrieben, so lauten die Randbedingungen (Abb. 2)

$$\tau = 0 \qquad \text{für } z = 0, \tag{20}$$

$$w = f(r) \qquad \text{für } z = 0 \text{ und } r \leqq a \,, \tag{21}$$

$$\sigma_z = 0 \qquad \text{für } z = 0 \text{ und } r > a \,. \tag{22}$$

Für diesen Belastungsfall wurden schon von *Schubert*[2] Lösungen angegeben. Ausgehend von der bekannten Lösung für die Einzelkraft auf den elastischen Halbraum gewinnt er eine Integralgleichung für die Druckverteilung unter elastisch gelagerten Tragwerken. Im folgenden soll eine allgemeinere Lösung für den rotationssymmetrischen Verschiebungszustand gefunden werden, die auch noch die Verschiebungen und Spannungen für den gesamten Halbraum liefert.

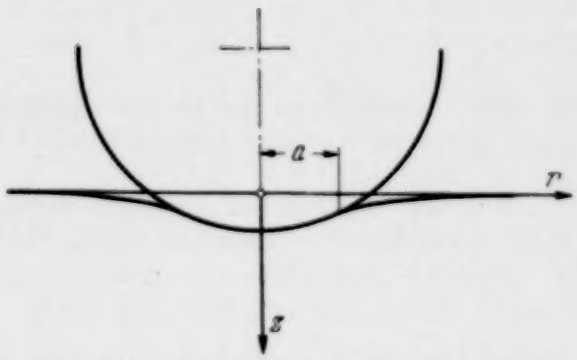


Abb. 2. Halbraum mit vorgegebener Verschiebung der Oberfläche.

Die Verschiebungsfunktion ist dieselbe wie in Ziff. 3. Ebenso wie dort läßt sich die Randbedingung (20) durch (9) erfüllen. Geht man mit der Randbedingung (21) in die zweite Gleichung (6) ein, so erhält man

$$f(r) = -\,2\,\frac{m-1}{m-2} \int_0^\infty B(\lambda)\lambda J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad \text{für } r \leqq a \,. \tag{23}$$

Die Randbedingung (22) führt auf

$$0 = \int_0^\infty B(\lambda)\, \lambda^2 J_0(\lambda r)\, d\lambda \qquad \text{für } r > a \,. \tag{24}$$

---

[1] *M.-O.*, S. 50.

[2] *G. Schubert*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 132.

Macht man den Ansatz

$$\lambda^2 B(\lambda) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n J_{n+\mu+1}(a\lambda)\lambda^{-(n+\mu)} \tag{25}$$

und geht damit in (23) und (24) ein, so wird

$$f(r) = -\frac{2(m-1)}{m-2}\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_0^\infty J_{n+\mu+1}(a\lambda)\lambda^{-(n+\mu+1)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad \text{für } r \leqq a, \tag{26}$$

$$0 = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_0^\infty J_{n+\mu+1}(a\lambda)\lambda^{-(n+\mu)} J_0(\lambda r)\, d\lambda \quad \text{für } r > a. \tag{27}$$

Gleichung (27) ist sicher erfüllt, wenn die Faktoren von A_n verschwinden. Allgemein gilt[1]

$$\int_0^\infty J_{m+1}(a\lambda)\, J_k(\lambda r)\lambda^{k-m}\, d\lambda = 0 \quad \text{für } r > a,$$

wobei $\mathrm{Re}(k) > -1$ und $\mathrm{Re}(m-k+1) > 0$ sein muß. Setzt man $k=0$, so ist die Bedingung (27) und damit auch die Randbedingung (22) erfüllt. Die in (26) auftretenden Integrale lassen sich auswerten. Es ist[2]

$$\int_0^\infty \lambda^{-(n+1+\mu)} J_{n+1+\mu}(a\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\, a^{n+\mu}}{\Gamma(n+\mu+\frac{3}{2})\, 2^{n+\mu+1}} F\left(\tfrac{1}{2}; -(n+\mu+\tfrac{1}{2}); 1; \frac{r^2}{a^2}\right) r \leqq a.$$

Mit $n+\mu = n-\frac{1}{2}$ geht die hypergeometrische Funktion F in ein Polynom über. Nach kurzer Zwischenrechnung erhält man aus (26)

$$f(r) = -\frac{2(m-1)}{m-2}\sum_0^\infty A_n \frac{a^{n-\frac{1}{2}}}{2^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} F\left(\tfrac{1}{2}; -n; 1; \frac{r^2}{a^2}\right). \tag{28}$$

Ist $f(r)$ in Form eines Polynoms

$$f(r) = -\sum_0^\infty b_n r^{2n} \tag{28a}$$

gegeben, so können die Konstanten A_n durch Koeffizientenvergleich ermittelt werden. Setzt man die so gefundenen Funktionen $A(\lambda)$ und $B(\lambda)$ in (5) ein, so lautet die Verschiebungsfunktion

$$\Phi = \sum_0^\infty A_n \int_0^\infty \left[\frac{2}{m\lambda} + z\right] J_{n+\frac{1}{2}}(a\lambda)\, \lambda^{-(n+\frac{3}{2})} e^{-\lambda z} J_0(\lambda r)\, d\lambda. \tag{29}$$

Aus (29) können dann die Verschiebungen und Spannungen gemäß (6) sofort berechnet werden, da die Integrale mit den angegebenen Bedingungen für die Belastung gleichmäßig konvergieren.

5. Die im Unendlichen gestützte dicke Platte mit rotationssymmetrischer Belastung. Ähnlich wie beim elastischen Halbraum kann für die dicke Platte mit rotationssymmetrischer Belastung die Verschiebungsfunktion aufgestellt werden. Lösungen für die dicke Platte wurden schon von *Nádai*[3], *Marguerre*[4] und *Ohlig*[5] gegeben.

Wird hier die Verschiebungsfunktion in der Form angesetzt

$$\Phi = \int_0^\infty \left[\left(A(\lambda) + z\, B(\lambda)\right) \mathfrak{Sin}\, \lambda z + \left(C(\lambda) + z\, D(\lambda)\right) \mathfrak{Cof}\, \lambda z\right] J_0(\lambda r)\, d\lambda, \tag{30}$$

so läßt sich für die im Unendlichen gestützte Platte der Spannungsverlauf berechnen. Für die im Endlichen gestützte Platte kann die Lösung wie bei *Nádai* und *Ohlig* durch Überlagerung einer

---

[1] *M.-O.*, S. 51.
[2] *M.-O.*, S. 49.
[3] *A. Nádai*, Elastische Platten, S. 308 ff. Berlin 1925.
[4] Siehe Fußnote 2 von S. 178.
[5] *R. Ohlig*, Ing.-Arch. 13 (1942), S. 155.

weiteren Funktion gefunden werden. Die Randbedingungen lauten (Abb. 3)

$$\sigma_z = 0 \quad \text{für } z = 0, \tag{31}$$

$$\tau = 0 \quad \text{für } z = 0, \tag{32}$$

$$\sigma_z = f(r) \quad \text{für } z = h, \tag{33}$$

$$\tau = 0 \quad \text{für } z = h, \tag{34}$$

$$w = 0 \quad \text{für } r \to \infty, \tag{35}$$

$$u = 0 \quad \text{für } r \to \infty. \tag{36}$$

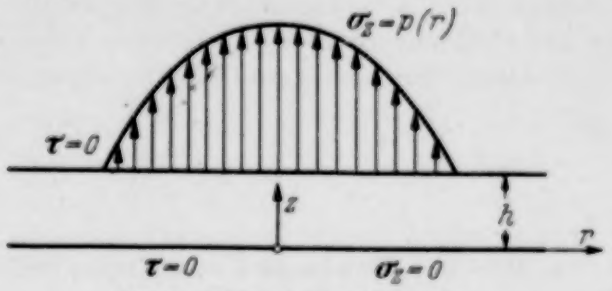


Abb. 3. Platte mit Normalbelastung.

Die Bedingungen (35) und (36) sind schon durch den Ansatz der Verschiebungsfunktion erfüllt, da

$$\lim_{r\to\infty} J_0(\lambda r) = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} J_1(\lambda r) = 0$$

ist. Die Funktionen $A(\lambda)$ bis $D(\lambda)$ sind nun noch aus den Randbedingungen (31) bis (34) zu bestimmen. Durch

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= -h\,B(\lambda)\,\psi(\lambda), \\ C(\lambda) &= -\frac{2\,B(\lambda)}{m\,\lambda}, \\ D(\lambda) &= -\frac{m}{m-2}\,B(\lambda)\,h\,\lambda\,\psi(\lambda) \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

wird den Randbedingungen (31), (32) und (34) genügt, wobei zur Abkürzung

$$\psi(\lambda) \equiv \frac{m-2}{m}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda h}{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + \lambda h\,\mathfrak{Cof}\,\lambda h} \tag{37a}$$

gesetzt ist. Geht man mit (37) in (30) ein, so erhält man

$$\sigma_z = \frac{2Gm}{m-2}\int_0^\infty \left[\mathfrak{Sin}\,\lambda z - \lambda z\,\mathfrak{Cof}\,\lambda z + \frac{m}{m-2} z h \lambda^2 \psi(\lambda)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda z\right] B\lambda^2 J_0(\lambda r)\,d\lambda. \tag{38}$$

Aus (38) folgt mit der Randbedingung (33) die Integralgleichung erster Art zur Bestimmung der Funktion $B(\lambda)$

$$f(r) = \frac{2Gm}{m-2}\int_0^\infty \Pi(\lambda)\,B(\lambda)\lambda^2\,J_0(\lambda r)\,d\lambda \tag{39}$$

mit

$$\Pi(\lambda) \equiv \frac{\mathfrak{Sin}^2\,\lambda h - \lambda^2 h^2}{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + \lambda h\,\mathfrak{Cof}\,\lambda h}. \tag{39a}$$

Die Lösung von (39) ist durch die Hankeltransformation

$$B(\lambda)\lambda\,\Pi(\lambda) = \frac{m-2}{2Gm}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,d\xi$$

zu leisten. Damit gibt (37)

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda) &= -\frac{m-2}{2Gm}\,\frac{h\,\psi(\lambda)}{\lambda\,\Pi(\lambda)}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,d\xi, \\ B(\lambda) &= \frac{m-2}{2Gm}\,\frac{1}{\lambda\,\Pi(\lambda)}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,d\xi, \\ C(\lambda) &= -\frac{m-2}{Gm^2}\,\frac{1}{\lambda^2\,\Pi(\lambda)}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,d\xi, \\ D(\lambda) &= -\frac{h\,\psi(\lambda)}{2G\,\Pi(\lambda)}\int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,J_0(\lambda\xi)\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Setzt man die Ausdrücke (40) in (30) ein, so können die Verschiebungen und Spannungen berechnet werden. Voraussetzung hierfür ist die gleichmäßige Konvergenz des Integrals in (40), so daß Differentation und Integration vertauscht werden dürfen. Hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz in r und z sind die Bedingungen

$$\left| \int_0^\infty f(\xi)\,\xi\,d\xi \right| < K\,, \qquad \left| f(\xi)\,\xi \right| < L\,.$$

6. Der unendlich lange Kreiszylinder mit radialer Belastung. Ein unendlich langer Kreiszylinder wird an seiner Oberfläche $r=a$ durch radiale Kräfte beansprucht (umschnürter Zylinder, Abb. 4). Für einen besonderen Belastungsfall des umschnürten Zylinders hat *L. Föppl*[1] eine Lösung angegeben. Er nimmt die Bildfunktion der Belastung als Exponentialfunktion an und erhält eine Lösung, die sich einer Ringlast mit unendlich kleiner Belastungsfläche annähert.

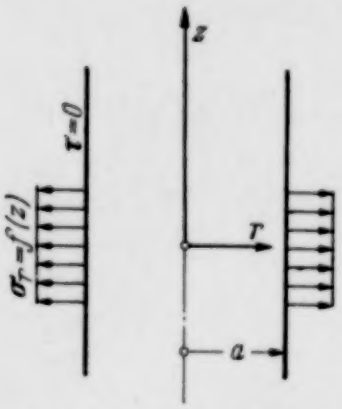


Abb. 4. Umschnürter Zylinder.

Läßt sich die Belastung durch *Fourier*-Integrale darstellen, so kann mit unserer Methode eine allgemeinere Lösung gefunden werden. Im folgenden wird eine zu $z=0$ symmetrische Belastungsfunktion angenommen. Der Ansatz für die Verschiebungsfunktion lautet hierfür

$$\Phi = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\, J_0(i\lambda r) + B(\lambda) i r\, J_1(i\lambda r) \right] \sin \lambda z\, d\lambda\,. \tag{41}$$

Die Randbedingungen sind

$$\sigma_r = \mathrm{f}(z) \qquad \text{für } r = a\,, \tag{42}$$

$$\tau = 0 \qquad \text{für } r = a\,. \tag{43}$$

Der Randbedingung (43) wird genügt durch

$$\lambda m A(\lambda) = B(\lambda) \left[2(m-1) - m\lambda a \frac{J_0(i\lambda a)}{i J_1(i\lambda a)} \right]. \tag{44}$$

Geht man mit (44) in (41) ein und berechnet σ_r, so führt die Randbedingung (42) auf die Integralgleichung erster Art zur Bestimmung von $B(\lambda)$

$$f(z) = \frac{2Gm}{m-2} \int_0^\infty \varphi(\lambda)\, B(\lambda)\, \lambda^2 \cos \lambda z\, d\lambda \tag{45}$$

mit

$$\varphi(\lambda) \equiv \lambda a \frac{J_0^2(i\lambda a)}{i J_1(i\lambda a)} - 2\frac{m-1}{m\lambda a}\, i\, J_1(i\lambda a) - \lambda a\, i\, J_1(i\lambda a)\,. \tag{45a}$$

Die Lösung von (45) lautet bekanntlich

$$\frac{2Gm}{m-2} \varphi(\lambda) \lambda^2 B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \cos \lambda \xi\, d\xi\,. \tag{46}$$

Damit ist $A(\lambda)$ und $B(\lambda)$ gefunden, so daß die Verschiebungen und Spannungen aus (41) berechnet werden können.

Die hier gezeigte Methode läßt sich ohne Schwierigkeiten auf den unendlich langen Kreiszylinder mit Tangentialbelastung sowie auf das unendlich lange Rohr ausdehnen.

7. Der Zylinder mit beliebig vorgeschriebener Normalverschiebung der Stirnfläche. In Ziff. **3** bis **6** waren die Randbedingungen entweder auf parallelen Ebenen $z=$konst. oder auf Kreiszylindern $r=$konst. gegeben. Im folgenden werden nun die Randbedingungen für $z=$konst. und zugleich $r=$konst. vorgeschrieben[2]. Mit dem Ansatz

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

[1] *L. Föppl*, Drang und Zwang, Bd. 2, S. 163 ff. München 1928.

[2] Vgl. auch *F. Reutter*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 156.

wobei

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \left[A(\lambda) J_0(\lambda r) + B(\lambda) r J_1(\lambda r)\right] e^{-\lambda z}\, d\lambda , \tag{47}$$

$$\Phi_2 = \int_0^\infty \left[A^*(\lambda) I_0(\lambda r) + B^* i r I_1(\lambda r)\right] \sin \lambda z\, d\lambda \tag{48}$$

und zur Vereinfachung der Schreibweise

$$J_n(i\lambda r) \equiv I_n(\lambda r)$$

gesetzt ist, lassen sich die Randbedingungen

$$\sigma_r = 0 \qquad \text{für } r = a , \tag{49}$$

$$\tau = 0 \qquad \text{für } r = a , \tag{50}$$

$$w = f(r) \qquad \text{für } z = 0 \tag{51}$$

befriedigen (Abb. 5).

Die obere Integrationsgrenze von Φ_1 darf wegen der Nullstellen von J_0 und J_1 nicht mehr unendlich sein. Vielmehr muß, wie später gezeigt wird, die obere Integrationsgrenze kleiner als die erste Nullstelle von $J_1(\lambda a)$ gewählt werden.

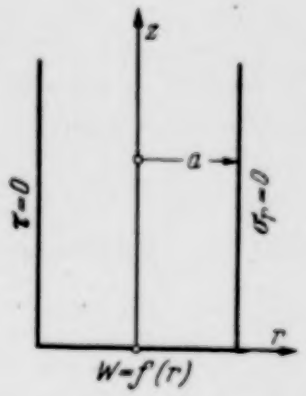


Abb. 5. Zylinder mit vorgeschriebener Normalverschiebung der Stirnfläche.

Der Randbedingung (50) wird genügt durch

$$m A(\lambda)\lambda = B(\lambda)\left[2(m-1) + m\lambda a \frac{J_0(\lambda a)}{J_1(\lambda a)}\right],$$

$$m A^*(\lambda)\lambda = B^*(\lambda)\left[2(m-1) - m\lambda a \frac{I_0(\lambda a)}{i\, I_1(\lambda a)}\right].$$

Berechnet man σ_r aus (47) und (48), so führt die Randbedingung (49) auf die Beziehung zwischen $B(\lambda)$ und $B^*(\lambda)$

$$\int_0^\infty \psi_1(\lambda a)\, B(\lambda)\, \lambda^2\, e^{-\lambda z}\, d\lambda = -\int_0^\infty \psi_2(\lambda a)\, B^*(\lambda)\, \lambda^2 \cos \lambda z\, d\lambda , \tag{52}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned} \psi_1(\lambda a) &\equiv -m\lambda a \frac{J_0^2(\lambda a)}{J_1(\lambda a)} + \frac{2(m-1)}{\lambda a} J_1(\lambda a) - m\lambda a\, J_1(\lambda a), \\ \psi_2(\lambda a) &\equiv m\lambda a \frac{I_0^2(\lambda a)}{i\, I_1(\lambda a)} - \frac{2(m-1)}{\lambda a} i\, I_1(\lambda a) - m\lambda a\, i\, I_1(\lambda a) . \end{aligned}\right\} \tag{52a}$$

Mit

$$g(z) \equiv \int_0^\infty \psi_1(\lambda a)\, B(\lambda)\, \lambda^2 e^{-\lambda z}\, d\lambda$$

geht (52) über in

$$-g(z) = \int_0^\infty \psi_2(a\lambda)\, B^*\, \lambda^2 \cos \lambda z\, d\lambda . \tag{53}$$

Die Lösung der Integralgleichung (53) lautet

$$\varphi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(u) \cos \lambda u\, du \tag{54}$$

mit

$$\varphi(\lambda) \equiv -\lambda^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \psi_2(\lambda a)\, B^*(\lambda) . \tag{54a}$$

Damit wird

$$B^*(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 \psi_2(\lambda a)} \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{u=0}^{u=\alpha} \psi_1(u)\, B(u)\, u^2\, e^{-uz} \cos \lambda z\, du\, dz . \tag{55}$$

Es muß nun noch die Funktion $B(\lambda)$ bestimmt werden. Aus der Verschiebung w erhält man, da $w_2=0$ ist, mit der Randbedingung (51) die Integralgleichung erster Art für $B(\lambda)$

$$f(r) = \frac{1}{m-2}\int_0^{\alpha} f_1(\lambda)\, B(\lambda)\,\lambda\, J_0(\lambda r)\, d\lambda - \frac{m}{m-2}\int_0^{\alpha} \lambda^2 r\, B(\lambda)\, J_1(\lambda r)\, d\lambda \tag{56}$$

mit

$$f_1(\lambda) \equiv 2\,(m-1) - m\,\lambda a\,\frac{J_0(\lambda a)}{J_1(\lambda a)}\,. \tag{56a}$$

Die Funktionen $\psi_1(\lambda a)$ und $f_1(\lambda)$ haben einfache Pole für $J_1(\lambda a)=0$. Für $\lambda \to 0$ wird

$$\lim_{\lambda\to 0} \psi_1(\lambda a) = -m-1\,, \qquad \lim_{\lambda\to 0} f_1(\lambda) = -2\,.$$

Die Untersuchung der weiteren Singularitäten umgeht man durch geeignete Wahl der oberen Integrationsgrenze, nämlich $\alpha < a\,\zeta_1$, wobei ζ_1 die kleinste Nullstelle von $J_1(a\,x)=0$ ist. Um die Integralgleichung (56) aufzulösen, setzt man

$$\lambda\, B(\lambda) = \sum_0^{\infty} a_n\, \varrho_n\,, \tag{57}$$

wobei die ϱ_n ein abgeschlossenes orthogonales Funktionssystem für den Bereich $0 \leqq \lambda \leqq \infty$ sind.

Geht man mit (57) in (56) ein, so wird

$$f(r) = \sum_0^{\infty} a_n \left[\frac{1}{m-2}\,\varphi_{1n}(r) - \frac{m}{m-2}\,\varphi_{2n}(r)\right] \tag{58}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1n}(r) &\equiv \int_0^{\alpha} f_1(\lambda)\,\varrho_n(\lambda)\, J_0(\lambda r)\, d\lambda\,, \\ \varphi_{2n}(r) &\equiv \int_0^{\alpha} \lambda r\,\varrho_n(\lambda)\, J_1(\lambda r)\, d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{58a}$$

Als orthogonales Funktionensystem werden die *Laguerre*schen Orthogonalfunktionen

$$\varrho_n(\lambda) = e^{-\lambda/2}\, L_n(\lambda)$$

gewählt. Geht man mit diesen $\varrho_n(\lambda)$ in (58a) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1n}(r) &\equiv \int_0^{\alpha} f_1(\lambda) J_0(\lambda r)\, e^{-\lambda/2}\, L_n(\lambda)\, d\lambda\,, \\ \varphi_{2n}(r) &\equiv \int_0^{\alpha} r\,\lambda\, J_1(\lambda r)\, e^{-\lambda/2}\, L_n(\lambda)\, d\lambda\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Mit den Reihendarstellungen für die *Bessel*funktionen erhält man aus (59)

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{1n}(r) &= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa}}{\varkappa!\,\varkappa!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2\varkappa} \int_0^{\alpha} \lambda^{2\varkappa} f_1(\lambda)\, e^{-\lambda/2}\, L_n(\lambda)\, d\lambda \equiv \sum_0^{\infty} h_{n\varkappa}\, r^{2\varkappa}\,, \\ \varphi_{2n}(r) &= 2\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{\varkappa}}{\varkappa!\,(\varkappa+1)!}\left(\frac{r}{2}\right)^{2(\varkappa+1)} \int_0^{\alpha} \lambda^{2(\varkappa+1)}\, e^{-\lambda/2}\, L_n(\lambda)\, d\lambda \equiv \sum_0^{\infty} p_{n\varkappa}\, r^{2(\varkappa+1)}\,, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Die Potenzreihen (60) setzt man in die Gleichung (58) ein; so ergibt sich

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{1}{m-2}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} h_{\varkappa n}\, r^{2\varkappa} - \frac{m}{m-2}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} p_{\varkappa n}\, r^{2(\varkappa+1)}\right].$$

Ist

$$f(r) = \sum_0^{\infty} A_n\, r^{2n}\,,$$

so können die a_n durch Koeffizientenvergleich aus den A_n ermittelt werden. Die Konvergenz der Reihen muß von Fall zu Fall untersucht werden. Wählt man als obere Integrationsgrenze $\alpha=1$,

so werden die Reihen für φ_{1n} und φ_{2n} wegen der absoluten Konvergenz der *Bessel*funktionen konvergent, da $f_1(\lambda)$ im Intervall (01) beschränkt ist (die kleinste positive Nullstelle von $J_1(x)$ ist >1). Mit (57) wird dann

$$\lambda B(\lambda) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda/2} L_n(\lambda) \tag{61}$$

gefunden. Geht man mit (61) in (55) ein, so erhält man

$$B^*(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\psi_2(a\lambda)\lambda^2} \sum_0^\infty a_n \int_{z=0}^{z=\infty} \int_{u=0}^{u=1} \psi_1(u)\, u\, L_n(u) e^{-u(z+\frac{1}{2})} \cos \lambda z \, du \, dz . \tag{62}$$

In (62) läßt sich die Integration über z durchführen. Es ist

$$B^*(\lambda) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\psi_2(a\lambda)\lambda^2} \sum_0^\infty a_n \int_0^1 \psi_1(u) \frac{u^2}{u^2+\lambda^2} L_n(u)\, e^{-u/2}\, du . \tag{62a}$$

Setzt man (62a) in (48) ein, so kann durch einfache Rechnung gezeigt werden, daß die Integrale (47) und (48) gleichmäßig konvergent in r und z sind. Die Verschiebungen und Spannungen können damit aus (47) und (48) durch Differentation bestimmt werden.

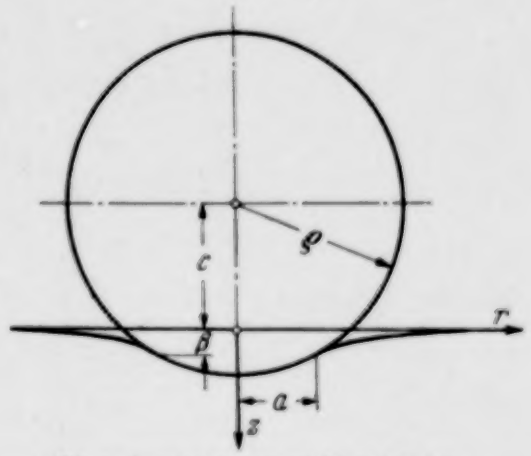


Abb. 6. Druck einer starren Kugel auf den elastischen Halbraum.

8. Druck einer starren Kugel auf den elastischen Halbraum. Die von *Hertz*[1], *Föppl*[2] und *Schubert*[3] gewonnenen Ergebnisse lassen sich auf dem hier gezeigten Weg neu ableiten. Wird eine starre Kugel vom Halbmesser a mit der Kraft P in den Halbraum eingedrückt (Abb. 6), so lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \tau &= 0 && \text{für } z = 0 , \\ \sigma_z &= 0 && \text{für } z = 0 \text{ und } r > a , \\ w &= \sqrt{\varrho^2 - r^2} - c && \text{für } z = 0 \text{ und } r \leqq a . \end{aligned}$$

Außer der Eindringtiefe der Kugel ist auch noch die Größe des Berührkreishalbmessers a zwischen Kugel und Halbraum unbekannt.

Aus der Gleichgewichtsbedingung für $z=0$

$$-p = 2\pi \int_0^a \sigma_{z0}\, r\, dr$$

kann die Eindringtiefe β als Funktion des Berührkreishalbmessers bestimmt werden. Wie später gezeigt wird, folgt der Berührkreishalbmesser a aus den Stetigkeitsbedingungen für die Oberfläche $z=0$.

Um die abgeleiteten Gleichungen verwenden zu können, muß w_0 in eine Potenzreihe nach r entwickelt werden. Die beiden ersten Glieder sind

$$w = \beta - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\varrho} \quad \text{mit} \quad \beta = \varrho - c . \tag{63}$$

Durch (63) wird die Kugel durch ein Rotationsparaboloid angenähert. Diese Vereinfachung ist zulässig, da die Formänderungen als klein vorausgesetzt werden.

Führt man den Koeffizientenvergleich gemäß Ziff. 4 durch, so lassen sich die Spannungen berechnen. Insbesondere wird

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z = -\frac{2Gm}{m-1}\Bigg[\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left(\beta - \frac{a^2}{\varrho}\right) \int_0^\infty (1+\lambda z)\, e^{-\lambda z} J_{1/2}(a\lambda) \sqrt{\lambda}\, J_0(\lambda r)\, d\lambda + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a^{3/2}}{\varrho} \int_0^\infty (1+\lambda z) e^{-\lambda z} J_{3/2}(a\lambda) \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_0(\lambda r)\, d\lambda . \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

[1] *H. Hertz*, Gesammelte Werke, Bd. 1, S. 155 ff.
[2] *L. Föppl*, Drang und Zwang, 2. Band, S. 213 ff. München 1928.
[3] Siehe Fußnote 2 von S. 181.

Für $z=0$ erhält man aus (64) nach Auswertung der Integrale[1]

$$\sigma_{z0} = -\frac{2Gm}{m-1}\left[\left(\beta - \frac{a^2}{\varrho}\right)\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{2}{\pi\varrho}\sqrt{a^2-r^2}\right]. \tag{65}$$

Die Gleichgewichtsbedingung ergibt den Zusammenhang zwischen der Kraft P, dem Druckkreishalbmesser a und der Einsenkung β; aus (65) erhält man nach einfacher Rechnung den Druckverlauf in der Oberfläche

$$\sigma_{z0} = -\frac{2Gm}{\pi(m-1)}\left[\left(\frac{p(m-1)}{4Gma} - \frac{2}{3}\frac{a^2}{\varrho}\right)\frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} + \frac{2}{\varrho}\sqrt{a^2-r^2}\right]. \tag{66}$$

Die Verschiebung in der z-Richtung wird

$$w_0 = \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\left[\left(\beta - \frac{a^2}{\varrho}\right)\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{\lambda}} J_{1/2}(a\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda + \frac{2a}{\varrho}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda^{3/2}} J_{3/2}(a\lambda) J_0(\lambda r)\, d\lambda\right]. \tag{67}$$

In (67) sind die Integrale auswertbar, und man erhält

$$w_{0\,I} = \beta - \frac{1}{2}\frac{r^2}{\varrho} \qquad \text{für } r < a,$$

$$w_{0\,II} = \beta - \frac{1}{2}\frac{a^2}{\varrho} \qquad \text{für } r = a,$$

$$w_{0\,III} = \frac{a}{r}\frac{2}{\pi}\left(\beta - \frac{a^2}{\varrho}\right)F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{4}{3}\frac{a^3}{r\varrho\pi}F\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{a^2}{r^2}\right) \qquad \text{für } r > a.$$

Aus der Beziehung

$$F(a;b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \qquad (a+b<c)$$

folgt

$$w_{0\,III} = w_{0\,II} = w_{0\,I} \qquad \text{für } r = a.$$

Der Zusammenhang der Oberfläche ist somit gesichert.

Um festzustellen, ob die Verschiebung eine stetige Funktion mit stetiger Ableitung ist, muß noch die Ableitung w_0' bestimmt werden. Es ergibt sich

$$\lim_{r\to a} w_{0\,III}' = \infty \qquad \text{für } \beta - \frac{a^2}{\varrho} \neq 0.$$

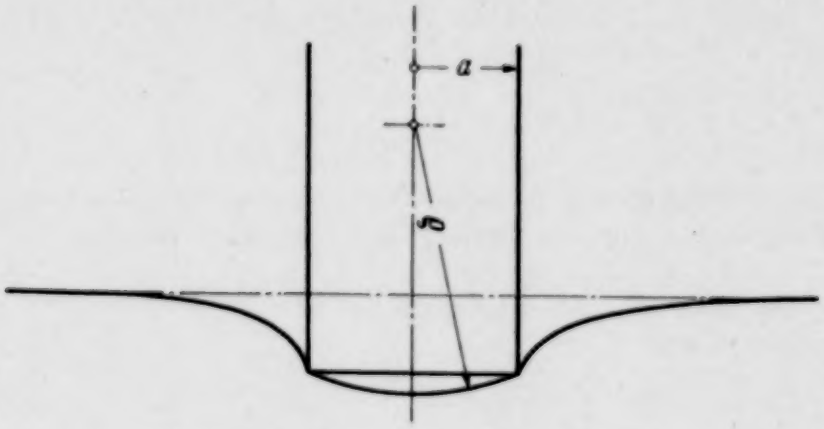


Abb. 7. Druck eines Zylinders auf den Halbraum.

Diese Forderung kann erfüllt werden durch einen Zylinder mit dem Halbmesser a und kugelförmiger Abrundung vom Halbmesser ϱ (Abb. 7). Wird dieser Zylinder soweit in den Halbraum eingedrückt, daß sich die senkrechte Tangente für die Verschiebung verwirklichen läßt, so ist der Druckverlauf für diesen Belastungsfall durch (66) gegeben, da a und ϱ bekannt sind.

Wird der Druckkörper dagegen als stetige Fläche entsprechend Abb. 6 angenommen, so muß, damit die Voraussetzungen, a sei der Druckkreishalbmesser, erfüllt ist, $w_0' \neq \infty$ sein. Diese Forderung verlangt

$$\beta - \frac{a^2}{\varrho} = 0.$$

Damit wird w_0' für $r=a$ stetig. Der Halbmesser des Druckkreises ist

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{8}\frac{p(m-1)\varrho}{Gm}}. \tag{68}$$

[1] *M.-O.*, S. 49.

Der Druckverlauf an der Oberfläche wird jetzt

$$\sigma_{z0} = -\frac{4Gm}{m-1}\,\frac{1}{\varrho\pi}\,\sqrt{a^2-r^2}\,. \tag{69}$$

Die Ausdrücke (68) und sind (69) die bekannten Formeln von *Hertz*. Die Eindringtiefe der Kugel in den Halbraum ist

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{1}{\varrho}\left(\frac{3(m-1)p}{8mG}\right)^2}\,.$$

9. Die Spannungen in der unendlich ausgedehnten Platte. Eine unendlich ausgedehnte Platte von der Dicke h werde durch ein rotationssymmetrisches Gleichgewichtssystem auf ihrer Oberfläche $z=h$ belastet (Abb. 8). Da die Belastung ein Gleichgewichtssystem bilden soll, so gilt

$$|p| = \varepsilon^2\pi p_0 = 4\,r_1\,\delta\pi p_1\,.$$

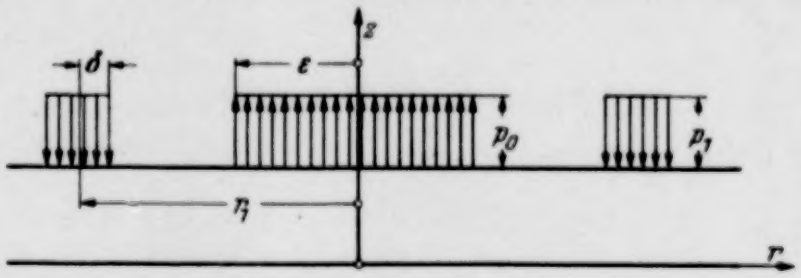


Abb. 8. Platte mit Normalbelastung.

Bei dieser Annahme ergibt sich für das in (40) auftretende Integral

$$\mathfrak{L} = \frac{p}{\pi\lambda}\left[\frac{1}{\varepsilon}\,J_1(\lambda\varepsilon) + \frac{r_1-\delta}{4r_1\delta}\,J_1(\lambda(r_1-\delta)) - \frac{r_1+\delta}{4r_1\delta}\,J_1(\lambda(r_1+\delta))\right].$$

Damit erhält man in den dimensionslosen Veränderlichen

$$\lambda h = x\,, \qquad \frac{z}{h} = \eta\,, \qquad \frac{r}{h} = \varrho$$

die Spannungen

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_z &= \frac{1}{h^2}\int_0^\infty \left\{\left[\mathfrak{Sin}(\eta x) - \eta x\,\mathfrak{Cof}(\eta x)\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2} + \eta x^2\,\mathfrak{Sin}(\eta x)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2}\right\}\times \\
&\qquad\qquad \cdot\times x\,J_0(\varrho x)\,\mathfrak{L}(x)\,dx\,, \\
\tau &= -\frac{1}{h^2}\int_0^\infty \left\{\left[\mathfrak{Sin}(\eta x) + \eta x\,\mathfrak{Cof}(\eta x)\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2} - \eta\,\mathfrak{Sin}(\eta x)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2}\right\}\times \\
&\qquad\qquad \times\, x^2 J_1(\varrho x)\,\mathfrak{L}(x)\,dx\,, \\
\sigma_r &= \frac{1}{h^2}\int_0^\infty \left\{\left[\mathfrak{Sin}(\eta x) + \eta x\,\mathfrak{Cof}(\eta x)\right]\frac{\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2} - \left[2\,\mathfrak{Cof}(\eta x) + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \eta x\,\mathfrak{Sin}(\eta x)\right] x\,\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2}\right\} x\,J_0(\varrho x)\,\mathfrak{L}(x)\,dx - \frac{1}{\varrho h^2}\,M(\varrho\eta), \\
\sigma_\varphi &= \frac{2}{mh^2}\int_0^\infty \left[\mathfrak{Sin}(\eta x)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2} - x\,\mathfrak{Cof}(\eta x)\,\frac{\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2}\right] x\times \\
&\qquad\qquad \cdot\times J_0(\varrho x)\,\mathfrak{L}(x)\,dx + \frac{1}{\varrho h^2}\,M(\varrho\eta)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Dabei ist zur Abkürzung in den Ausdrücken σ_r und σ_φ gesetzt

$$\left.\begin{aligned}
M(\varrho\eta) \equiv \int_0^\infty \left\{\frac{(m-2)\,\mathfrak{Sin}(\eta x)(\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x) - 2(m-1)\,\mathfrak{Cof}(\eta x)\,x\,\mathfrak{Sin}\,x}{m(\mathfrak{Sin}^2 x - x^2)} + \right. \\
\left. + \eta\,\frac{x\,\mathfrak{Cof}(\eta x)(\mathfrak{Sin}\,x + x\,\mathfrak{Cof}\,x) - x^2\,\mathfrak{Sin}\,\eta x\,\mathfrak{Sin}\,x}{\mathfrak{Sin}^2 x - x^2}\right\} J_1(\varrho x)\,\mathfrak{L}(x)\,dx\,.
\end{aligned}\right\} \tag{70a}$$

In (70) sind die unter den Integralen stehenden Funktionen für $x=0$ nicht definiert; doch sieht man sofort, daß diese für $x \to 0$ einen endlichen Grenzwert haben. Die Auswertung der Integrale (70) erfolgt wohl am besten mittels der *Simpson*schen Regel.

Um den Einfluß einer Einzellast und einer Ringlast zu untersuchen, bildet man den Grenzwert

$$\bar{\mathfrak{L}} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \delta \to 0}} \frac{p}{\pi \lambda} \left[\frac{1}{\varepsilon} J_1(\lambda \varepsilon) + \frac{r_1 - \delta}{4 r_1 \delta} J_1(\lambda (r_1 - \delta)) - \frac{r_1 + \delta}{4 r_1 \delta} J_1(\lambda (r_1 + \delta)) \right]$$

$$= \frac{p}{2\pi} \left[1 - J_0(\lambda r_1) \right].$$

Geht man mit $\bar{L}$ in (70) ein, so erhält man die Spannungen in der durch eine Einzelkraft beanspruchten dicken Platte.

10. Schlußbemerkung. Rückblickend dürfen wir feststellen, daß es nunmehr durch die Anwendung der *Hankel*-Transformation sowie der *Fourier*-Transformation gelungen ist, eine Reihe technisch wichtiger Probleme exakt zu lösen oder deren Lösung mindestens einfacher herzuleiten. Der besondere Vorteil der hier angewandten Methode besteht darin, daß die Verschiebungsfunktion unmittelbar aus den Randbedingungen berechnet werden kann.

(Eingegangen am 15. Mai 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Jung*, (14a) Stuttgart N, Robert-Mayer-Straße 66.

Die Gelenkwirkung von Flanschverbindungen.

Von **W. Moheit.**

1. Einleitung. Eine aus aneinander geflanschten Schüssen bestehende Rohrleitung kann der Einwirkung von Längskräften und Biegungsmomenten ausgesetzt sein. Dabei wird die Flanschverbindung in ihrem elastischen Verhalten stets andere Eigenschaften als das normale Rohr aufweisen. Wird das Rohr nur durch Längskräfte beansprucht, so wird in der Flanschverbindung dadurch, daß der Schraubenzug gegenüber der Längskraft in der Rohrwand einen Hebelarm besitzt, ein rotationssymmetrischer Verformungs- und Spannungszustand hervorgerufen. Während zu diesem Fall schon ausführliche Arbeiten[1] vorliegen, wurde das ungleich schwierigere Problem der Flanschklaffung einer Rohrleitung, die gemäß Abb. 1 durch ein Biegungsmoment beansprucht wird, bisher meines Wissens nur von *Schilhansl*[2] behandelt.

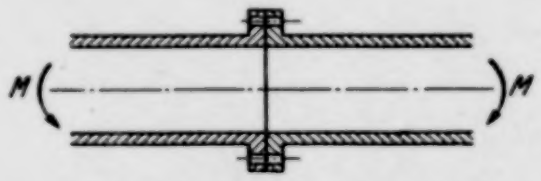


Abb. 1. Flanschverbindung einer Rohrleitung, die auf Biegung beansprucht wird.

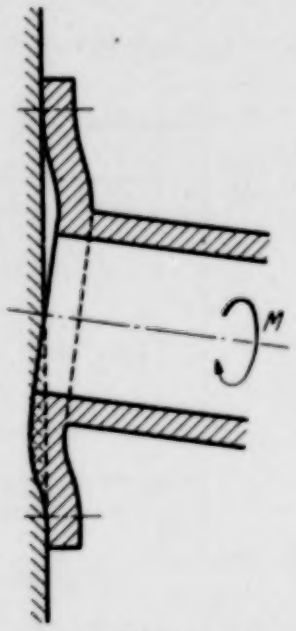


Abb. 2. Zur Rohrachse spiegelsymmetrische Verformung eines Rohrflansches.

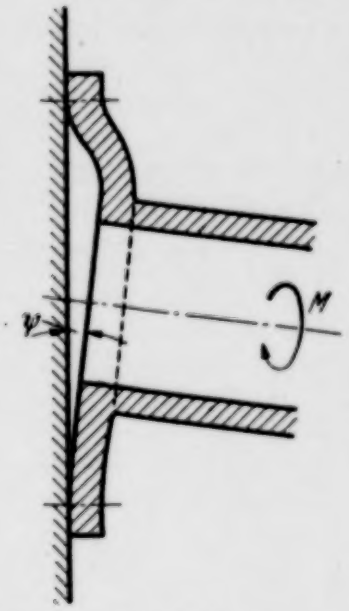


Abb. 3. Wirkliche Verformung einer auf Biegung beanspruchten Rohrflanschverbindung.

2. Die *Schilhansl*sche Lösung. Davon abgesehen, daß *Schilhansl* die Schraubenkräfte als Linienlast gleichmäßig über den Umfang des Schraubenteilkreises, der gleichzeitig als Außenrand der Flansche angesehen wird, verteilt annimmt und außer der Elastizität des Flansches auch diejenige des Rohres berücksichtigt, machte er die wichtige Annahme, daß die Verformung der Flansche zur Rohrachse spiegelsymmetrisch ist. Wie man an Hand der Abb. 2 erkennt, müßte bei einer solchen Annahme die gedrückte Flanschhälfte in den Gegenflansch eindringen können. Da dies aber nicht in Frage kommt, sondern sich vielmehr Verhältnisse, wie in Abb. 3 dargestellt, einstellen werden, so dürfen sicherlich die Ergebnisse von *Schilhansl* günstigstenfalls nur als erste Näherung zu werten sein.

In großen Zügen geht *Schilhansl* etwa wie folgt vor. Er denkt sich den Flansch vorübergehend vom Rohr abgetrennt. Sowohl der Flansch als auch das Rohr müssen dann mit den durch den Trennschnitt frei werdenden inneren Kräften für sich im Gleichgewicht stehen. Am Flansch müssen somit gemäß Abb. 4 die Schraubenkräfte P, die parallel zur Rohrachse gerichtete innere Kraft N_a, das innere Moment M_a und die senkrecht zur Rohrachse gerichteten inneren Kräfte T_a und S_a ein Gleichgewichtssystem bilden. Ähnlich müssen am Rohr die Kräfte N_∞, N_a, S_a, T_a und das Moment M_a für sich im Gleichgewicht stehen. Jedoch reichen die statischen Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung aller Größen nicht aus. Zwei Schnittgrößen müssen als statisch Überzählige betrachtet werden, deren Berechnung dann aus der Bedingung folgt, daß die Formänderung von Rohr und Flansch an der Verbindungsstelle übereinstimmt. Sind diese beiden statisch Überzähligen bekannt, können alle übrigen Spannungs- und Formänderungsgrößen in Abhängigkeit vom äußeren Moment M bestimmt werden.

---

[1] Vgl. u. a. *V. Jürgensonn*, Elastizität und Festigkeit im Rohrleitungsbau. Berlin 1940.
[2] *M. Schilhansl*, Wasserkraft und Wasserwirtschaft 36 (1941), S. 281.

Wie man an Hand der Ergebnisse rückwärts feststellen kann, liegt der Untersuchung von *Schilhansl* ein Zahlenbeispiel mit den in Abb. 4 angegebenen Abmessungen zugrunde.

Bevor ich auf eigene Untersuchungen eingehe, möchte ich noch das Ergebnis von *Schilhansl* vorwegnehmen. Für den beschriebenen Fall fand *Schilhansl* eine Flanschklaffung $\psi = 2 \cdot 74{,}66 \cdot 10^{-6} \frac{M}{E} = 149{,}32 \cdot 10^{-6} \frac{M}{E}$, wo E der Elastizitätsmodul des Werkstoffes der Flansche ist. Eine Definition für die Flanschklaffung ψ ist in Abb. 3 gegeben. Dieses Ergebnis besagt, daß die Nachgiebigkeit einer Flanschverbindung gegenüber Biegungsmomenten beim untersuchten Zahlenbeispiel so groß ist wie die eines Rohrstückes, dessen Länge etwa gleich dem sechsfachen lichten Rohrdurchmesser ist.

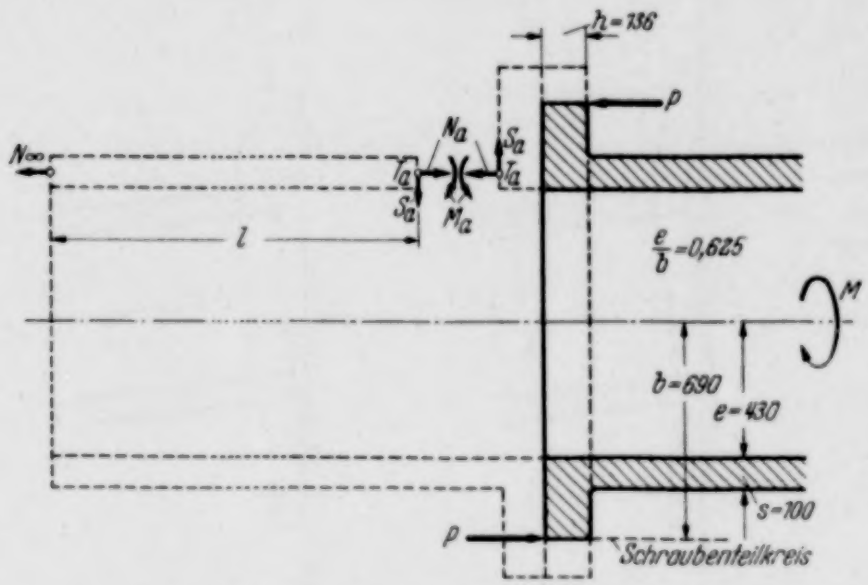


Abb. 4. Der Untersuchung von *Schilhansl* zugrunde liegende Rohrflanschverbindung.

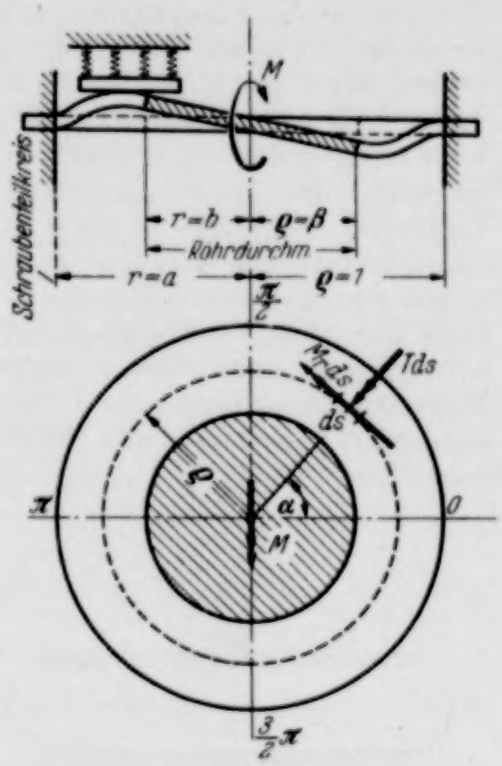


Abb. 5. Durch ein Punktmoment beanspruchte Kreisplatte mit starrem Kern.

3. Verbesserung der *Schilhansl*schen Lösung. a) Stellung der Aufgabe. Die von *Schilhansl* ermittelte Flanschklaffung ist jedoch vermutlich zu groß, weil in Wirklichkeit keine reine antimetrische Verformung vorliegt. Die Flanschverbindung unterliegt gemäß Abb. 3 einem größeren Zwang, weshalb sich sicherlich eine kleinere Klaffung einstellen wird. Zur besseren Abschätzung der tatsächlichen Klaffung ist es meiner Ansicht nach wesentlicher, die wirkliche Verformung des Flansches weitgehend zu berücksichtigen, also dem Umstand Rechnung zu tragen, daß die gedrückte Flanschhälfte nicht in den Gegenflansch eindringen kann. Ich beschränkte deshalb die Untersuchung auf eine Kreisplatte mit starrem Kern (Kerndurchmesser = Rohrdurchmesser). Der Fehler, den man bei Vernachlässigung der Rohrelastizität macht, wird nicht entscheidend sein. So fand beispielsweise *Schilhansl* auch, daß die zusätzliche Rohrdehnung in Flanschnähe die Flanschneigung um nur 4,3% vergrößert. Gibt man also nur den Flanschen die Möglichkeit, sich verformen zu können, so wird diese Klaffung etwas kleiner als die wirkliche ausfallen. Auf alle Fälle wird die so berechnete Flanschklaffung der tatsächlichen aber näher liegen als die von *Schilhansl* angegebene.

b) Die durch ein Punktmoment beanspruchte Kreisplatte mit starrem Kern. Zunächst wird die ringsum eingespannte Kreisplatte mit starrem Kern, an dem ein Punktmoment angreift, gemäß Abb. 5 untersucht. Wenn man wie *Schilhansl* von dünnen elastischen Platten ausgeht, lautet hierfür der Lösungsansatz[1]

$$w = \cos\alpha \left(A\varrho + B\frac{1}{\varrho} + C\varrho^3 + D\varrho \ln \varrho \right).$$

Hierbei sind $\varrho = r/a$ und α die dimensionslosen Polarkoordinaten eines Punktes der Kreisplatte.

[1] Vgl. Beton-Kalender 1944, S. 125, oder *Flügge*, Bauingenieur 10 (1929), S. 223.

Zur Bestimmung der vier Konstanten A, B, C und D dienen die Bedingungen:

$$\text{I)}\ \varrho = 1 : w = 0\,,$$
$$\text{II)}\ \varrho = 1 : w' = 0\,,$$
$$\text{III)}\ \varrho = \frac{b}{a} = \beta \ \text{ und } \ \alpha = 0 : w' = \frac{w}{\beta}\,,$$
$$\text{IV)}\ -\int_{-\pi}^{+\pi} M_r a\varrho \cos\alpha\, d\alpha + \int_{-\pi}^{+\pi} T a\varrho \sin\alpha\, d\alpha + \int_{-\pi}^{+\pi} Q_r a^2\varrho^2 \cos\alpha\, d\alpha = -M\,.$$

In der letzten Bedingung bedeuten mit der Plattensteifigkeit

$$K = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (\mu = \text{Querdehnungszahl})$$

gemäß Abb. 5

$$M_r = -\frac{K}{a^2}\left[w'' + \mu\left(\frac{1}{\varrho}w' + \frac{1}{\varrho^2}w^{\cdot\cdot}\right)\right] = \text{um die tangentiale Richtung drehendes Moment,}$$

$$T = -\frac{K}{a^2}(1-\mu)\left[\frac{1}{\varrho}w' - \frac{1}{\varrho^2}w\right]^{\cdot} = \text{um die radiale Richtung drehendes Moment,}$$

$$Q_r = -\frac{K}{a^3}(\Delta w)' = -\frac{K}{a^3}\left[w''' + \frac{1}{\varrho}w'' - \frac{1}{\varrho^2}w' + \frac{1}{\varrho^2}w^{\cdot\cdot\cdot} - \frac{2}{\varrho^3}w^{\cdot\cdot}\right] = \text{Querkraft im Abstande } r = a\varrho \text{ vom Mittelpunkt,}$$

$$\left(\ldots' = \frac{\partial \ldots}{\partial \varrho};\ \ldots^{\cdot} = \frac{\partial \ldots}{\partial \alpha}\right).$$

Nach Einsetzen des Lösungsansatzes für w erhält man

$$M_r = -\frac{K}{a^2}\cos\alpha\left[2B(1-\mu)\frac{1}{\varrho^3} + 2C(3+\mu)\varrho + D(1+\mu)\frac{1}{\varrho}\right],$$

$$T = -\frac{K}{a^2}(1-\mu)\sin\alpha\left[B\frac{2}{\varrho^3} - 2C\varrho - D\frac{1}{\varrho}\right],$$

$$Q_r = -\frac{K}{a^3}\cos\alpha\left[8C - D\frac{2}{\varrho^2}\right].$$

Setzt man schließlich diese Ausdrücke in die vierte Bedingung ein, so erhält man unter Beachtung, daß

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2\alpha\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\alpha\, d\alpha = \pi$$

ist,

$$D = -\frac{Ma}{4\pi K} = \frac{2(1+\beta^2)}{2(1+\beta^2)}\left(-\frac{Ma}{4\pi K}\right).$$

Die übrigen drei Konstanten werden mit Hilfe der drei ersten Bedingungen bestimmt. Wird ebenfalls in diesen Bedingungen der Lösungsansatz w eingesetzt, so nehmen sie die Form an:

$$\text{I)}\ A + B + C = 0\,,$$
$$\text{II)}\ A - B + 3C + D = 0\,,$$
$$\text{III)}\ -2B + 2C\beta^4 + D\beta^2 = 0\,.$$

Durch Auflösen dieser drei Gleichungen nach den drei noch gesuchten Konstanten erhält man

$$A = \frac{1-\beta^2}{2(1+\beta^2)}\left(-\frac{Ma}{4\pi K}\right),$$

$$B = \frac{\beta^2}{2(1+\beta^2)}\left(-\frac{Ma}{4\pi K}\right),$$

$$C = -\frac{1}{2(1+\beta^2)}\left(-\frac{Ma}{4\pi K}\right).$$

Nach Einsetzen der Konstantenwerte in den Lösungsansatz w ergibt sich schließlich folgende Lösung:

$$w = -\frac{Ma}{4\pi K}\,\frac{\cos\alpha}{2(1+\beta^2)}\left[(1-\beta^2)\varrho + \beta^2\frac{1}{\varrho} - \varrho^3 + 2(1+\beta^2)\varrho\ln\varrho\right].$$

Hiermit wäre die Aufgabe bereits gelöst, wenn man die Rohrelastizität unberücksichtigt läßt und sich mit einer antimetrischen Verformung zufrieden gibt. Wir wollen aber hier gerade die Lösung derart verbessern, daß die gedrückte Flanschhälfte (in Abb. 5 linke Hälfte) so weit zurückgedrückt wird, bis dort die Ausbiegungen $w \approx 0$ sind. Die zurückdrückende Kraft ist nach Größe und Verteilung unbekannt. Da aber nur die Winkelklaffung der Flansche interessiert und wir uns mit einer Näherungslösung begnügen wollen, ist es ausreichend, als zurückdrückende Kraft einfach eine außermittig wirkende Einzellast P auf dem Kernrand bei $\alpha = \pi$ anzusetzen.

c) Die durch eine außermittige Einzellast beanspruchte Kreisplatte mit starrem Kern. Die außermittig wirkende Einzellast wollen wir uns wiederum in den antimetrischen und in den symmetrischen Anteil mit $\frac{1}{2} P$ in $\alpha = 0$ und π zerlegt denken.

Die Lösung des antimetrischen Anteils gemäß Abb. 6 läßt sich unter Verwendung der oben angegebenen Ableitung sofort angeben, wenn $M = 2 \frac{P}{2} b = P \beta a$ gesetzt wird. Man erhält dann

$$w = \frac{P \beta a^2}{4 \pi K} \frac{\cos \alpha}{2 (1+\beta^2)} \left[(1-\beta^2) \varrho + \beta^2 \frac{1}{\varrho} - \varrho^3 + 2 (1+\beta^2) \varrho \ln \varrho \right].$$

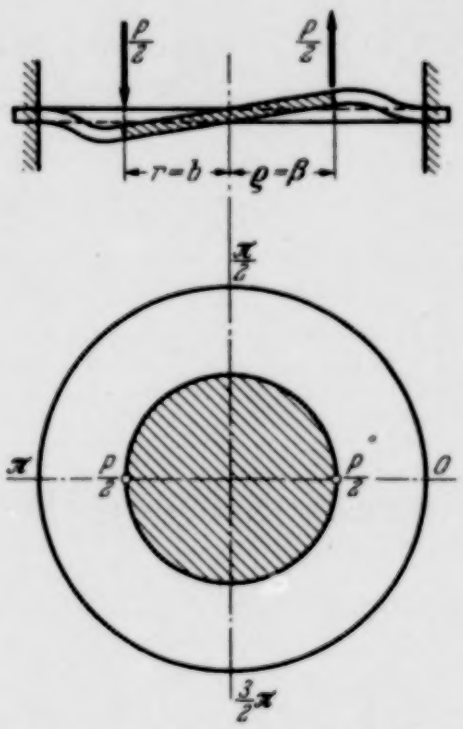


Abb. 6. Durch den antimetrischen Teil einer außermittigen Einzellast beanspruchte Kreisplatte mit starrem Kern.

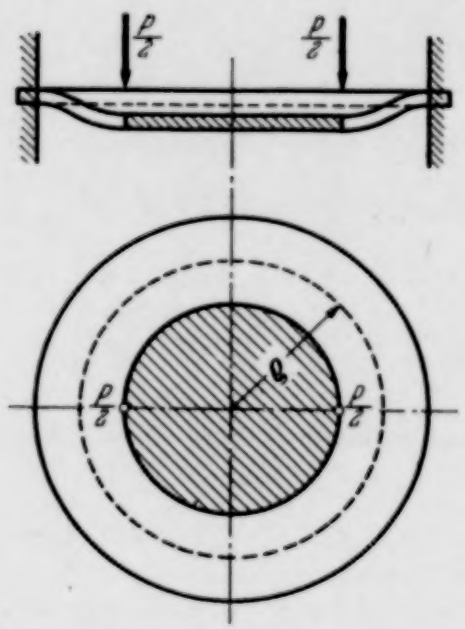


Abb. 7. Durch den symmetrischen Teil einer außermittigen Einzellast beanspruchte Kreisplatte mit starrem Kern.

Beim symmetrischen Anteil (Abb. 7) geht man zweckmäßig von dem Lösungsansatz[1]:

$$w = A + B \varrho^2 + C \ln \varrho + D \varrho^2 \ln \varrho$$

aus und bestimmt die Integrationskonstanten mit Hilfe der Bedingungen

I) $\varrho = 1 : w = 0$,

II) $\varrho = 1 : w' = 0$,

III) $\varrho = \beta : w' = 0$,

IV) $\varrho = \frac{r}{a} : Q_r = - \frac{P}{2 a \pi \varrho}$ (= Querkraft im Abstande $r = a \varrho$ vom Mittelpunkt).

In der letzten Bedingung ist, da jeder Durchmesser bei der verformten Kreisplatte eine Symmetrieachse bleibt,

$$Q_r = - \frac{K}{a^3} (\Delta w)' = - \frac{K}{a^3} \left(w''' + \frac{1}{\varrho} w'' - \frac{1}{\varrho^2} w' \right)$$

[1] Vgl. Beton-Kalender 1944, S. 125.

zu setzen. Nach Einführen des Lösungsansatzes w nehmen die vier vorgeschriebenen Bedingungen folgende Form an:

$$\text{I)}\quad A + B = 0\,,$$

$$\text{II)}\quad 2B + C + D = 0\,,$$

$$\text{III)}\quad 2B\beta^2 + C + D\beta^2(1 + 2\ln\beta) = 0\,,$$

$$\text{IV)}\quad D\,\frac{4}{\varrho} = +\,\frac{Pa^2}{2\pi\varrho K}\,.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen liefert für die gesuchten Konstanten folgende Werte:

$$A = -\,\frac{1-\beta^2-2\beta^2\ln\beta}{\beta^2-1}\,\frac{Pa^2}{16\pi K}\,,$$

$$B = \frac{1-\beta^2-2\beta^2\ln\beta}{\beta^2-1}\,\frac{Pa^2}{16\pi K}\,,$$

$$C = \frac{4\beta^2\ln\beta}{\beta^2-1}\,\frac{Pa^2}{16\pi K}\,,$$

$$D = 2\,\frac{Pa^2}{16\pi K}\,.$$

Sonach lautet die Lösung:

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi K}\,\frac{1}{\beta^2-1}\left[(1-\beta^2-2\beta^2\ln\beta)(\varrho^2-1)+4\beta^2\ln\beta\ln\varrho+2(\beta^2-1)\varrho^2\ln\varrho\right].$$

Die Überlagerung der beiden Teilbelastungen liefert die Lösung für die außermittige Einzellast:

$$w = \frac{Pa^2}{16\pi K}\left\{\frac{1}{\beta^2-1}\left[\left((1-\beta^2(1+2\ln\beta)\right)(\varrho^2-1)+4\beta^2\ln\beta\ln\varrho+2(\beta^2-1)\varrho^2\ln\varrho\right]+\right.$$
$$\left.+\,\frac{2\beta\cos\alpha}{1+\beta^2}\left[(1-\beta^2)\varrho+\beta^2\frac{1}{\varrho}-\varrho^3+2(1+\beta^2)\varrho\ln\varrho\right]\right\}.$$

d) Ermittlung der Größe der zurückdrückenden Kraft P. Die Größe von P wird aus der Bedingung bestimmt, daß $\Sigma w \equiv 0$ für $\varrho=\beta$ und $\alpha=\pi$ sein soll:

$$\frac{Ma}{4\pi K}\,\frac{1}{2(1+\beta^2)}\left[(1-\beta^2)\beta+\beta-\beta^3+2(1+\beta^2)\beta\ln\beta\right]+\frac{Pa^2}{16\pi K}\left\{\frac{1}{\beta^2-1}\cdot\left[\left(1-\beta^2(1+2\ln\beta)\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(\beta^2-1)+4\beta^2\ln\beta\ln\beta+2(\beta^2-1)\beta^2\ln\beta\right]-\frac{2\beta}{1+\beta^2}\left[(1-\beta^2)\beta+\beta-\beta^3+2(1+\beta^2)\beta\ln\beta\right]\right\}=0.$$

Vorstehender Ausdruck gibt nach P aufgelöst:

$$P = +\,\frac{4M}{a}\,\frac{\beta(1-\beta^2)\,[1-\beta^2+(1+\beta^2)\ln\beta]}{-1+5\beta^2-7\beta^4+3\beta^6+(1-\beta^4)\,4\beta^2\ln\beta+(1+\beta^2)\,4\beta^2\ln^2\beta}\,.$$

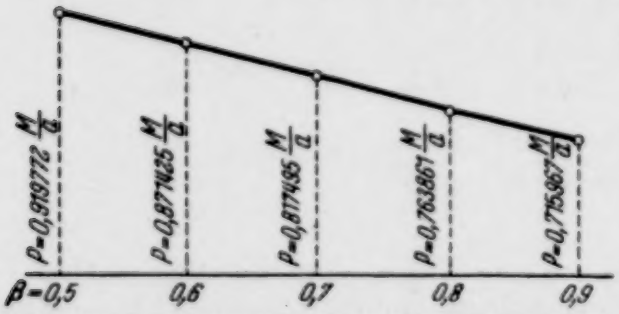


Abb. 8. Zur numerischen Auswertung der Beziehung für P.

Streng genommen ist an der Stelle $\varrho=\beta$ und $\alpha=\pi$ nach Abb. 3 $\Sigma w \neq 0$. Der gemachte Fehler ist aber von untergeordnetem Einfluß. Die numerische Auswertung der Beziehung für P liefert die in Abb. 8 aufgetragenen Werte. Die sich ergebende Kurve könnte angenähert durch eine Gerade ersetzt werden.

4. Bestimmung der Flanschklaffung bei verschiedenen β-Werten. Nachdem nunmehr die Größe der zurückdrückenden Kraft P für die verschiedenen Werte $\beta=0{,}5\ldots0{,}9$ bekannt ist, kann die Verformung des Flansches angegeben werden. Unter Fortlassung der Zwischenrechnung werden für den Meridianschnitt $\alpha=0$ bis π folgende Ausbiegungen errechnet.

ϱ	$\frac{\pi K}{M a} w$				
	$\beta = 0{,}5$	$\beta = 0{,}6$	$\beta = 0{,}7$	$\beta = 0{,}8$	$\beta = 0{,}9$
— 1,00	0	0	0	0	0
— 0,95	— 0,000043	— 0,000021	— 0,000009	— 0,000004	— 0,000001
— 0,90	— 0,000157	— 0,000075	— 0,000031	— 0,000009	0
— 0,85	— 0,000315	— 0,000144	— 0,000053	— 0,000011	
— 0,80	— 0,000489	— 0,000210	— 0,000065	0	
— 0,75	— 0,000653	— 0,000252	— 0,000052		
— 0,70	— 0,000770	— 0,000247	0		
— 0,65	— 0,000812	— 0,000176			
— 0,60	— 0,000732	0			
— 0,55	— 0,000484				
— 0,50	0				
0,50	0,012578				
0,55	0,012626				
0,60	0,011752	0,005760			
0,65	0,010264	0,005648			
0,70	0,008416	0,004999	0,002156		
0,75	0,006419	0,004024	0,002032		
0,80	0,004457	0,002910	0,001621	0,000566	
0,85	0,002695	0,001816	0,001083	0,000481	
0,90	0,001277	0,000883	0,000553	0,000283	0,000062
0,95	0,000339	0,000239	0,000157	0,000088	0,000031
1,00	0	0	0	0	0

Abb. 9. Flanschklaffung $\frac{\pi \cdot K}{M} \psi = f(\beta)$.

Außerdem ist man jetzt in der Lage, die Neigung des Flansches bei verschiedenen β-Werten anzugeben. Bezeichnet man als Flanschklaffung den doppelten Neigungswinkel eines Flansches (vgl. Abb. 3), so wird für

$$\beta = 0{,}5: \psi = \frac{2 \cdot 0{,}012578}{2 \cdot 0{,}5\, a} \frac{M a}{\pi K} = 0{,}025156 \frac{M}{\pi K},$$

$$\beta = 0{,}6: \psi = \frac{2 \cdot 0{,}005760}{2 \cdot 0{,}6\, a} \frac{M a}{\pi K} = 0{,}009600 \frac{M}{\pi K},$$

$$\beta = 0{,}7: \psi = \frac{2 \cdot 0{,}002156}{2 \cdot 0{,}7\, a} \frac{M a}{\pi K} = 0{,}003080 \frac{M}{\pi K},$$

$$\beta = 0{,}8: \psi = \frac{2 \cdot 0{,}000566}{2 \cdot 0{,}8\, a} \frac{M a}{\pi K} = 0{,}000708 \frac{M}{\pi K},$$

$$\beta = 0{,}9: \psi = \frac{2 \cdot 0{,}000062}{2 \cdot 0{,}9\, a} \frac{M a}{\pi K} = 0{,}000069 \frac{M}{\pi K}.$$

Die in Abb. 9 aufgetragenen Werte zeigen, daß die Flanschklaffung in starkem Maße von β (Verhältnis Rohrhalbmesser : Flanschhalbmesser) abhängt. Zwischenwerte können entweder abgegriffen oder mit Hilfe der durch tabellarische Integration gefundenen Funktion:

$$\frac{\pi K}{M} \psi = -1{,}0175\, \beta^5 + 4{,}591667\, \beta^4 - 8{,}428625\, \beta^3 + 7{,}887734\, \beta^2 - 3{,}769788\, \beta + 0{,}736512$$

bestimmt werden. Hiermit verfügen wir über die gesuchten näherungsweisen Unterlagen zur Ermittlung der Nachgiebigkeit der Flanschverbindungen.

5. Schlußfolgerung. Abschließend soll nochmals der von *Schilhansl* berechnete Wert in diesem Zusammenhang betrachtet werden. Wie eingangs erwähnt, fand *Schilhansl* $\psi_1 = 149{,}3 \cdot 10^{-6} \frac{M}{E}$ für $\beta = 0{,}625$. Aus Abb. 9 wird aber für das gleiche Verhältnis $\psi_2 = 0{,}0073 \frac{M}{\pi K}$ abgegriffen. Zum besseren Vergleich muß ψ_2 noch weiter umgeformt werden. Mit der im Beispiel von *Schilhansl* zugrunde gelegten Flanschdicke $h = 13{,}60$ cm wird $K = \frac{13{,}60^3 E}{10.92} = 231\, E$, somit $\psi_2 = \frac{7300}{231\,\pi} \cdot 10^{-6} \frac{M}{E} = 10{,}1 \cdot 10^{-6} \frac{M}{E}$ und $\psi_1 : \psi_2 = 149{,}3 : 10{,}1 = 14{,}8$.

Dieses Ergebnis besagt, daß sich eine Flanschverbindung mit $\beta = 0{,}625$ rund 15mal steifer verhält, wenn man nicht einen antimetrischen Verformungszustand wie *Schilhansl* annimmt, sondern an der gedrückten Flanschhälfte der Wirklichkeit entsprechend eine zurückdrückende Kraft derart berücksichtigt, daß die gedrückte Flanschhälfte nicht in den Gegenflansch eindringen kann. Da die vernachlässigte Rohrelastizität nur sekundäre Bedeutung haben kann, ist anzunehmen, daß man mit den in Abb. 9 angegebenen Werten für die Nachgiebigkeit der Flansche der Wirklichkeit bereits sehr nahe kommt. Von Wert wäre es aber, hierüber noch Versuchswerte zu erfahren.

(Eingegangen am 24. Mai 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *W. Moheit*, (16) Wiesbaden, Bingertstraße 10.

Bewegungsverlauf und Abstimmbedingungen von Nachführgetrieben.

Von C. A. Traenkle.

1. Aufgabenstellung. In Abb. 1 ist das Schema eines einfachen Nachführgetriebes dargestellt. Die Marke A sitzt auf einem äußeren Ring und macht eine beliebige, von außen vorgegebene Bewegung. Es wird gefordert, die Marke N auf der inneren Scheibe, dem nachzuführenden Teil, möglichst genau mit A in Deckung zu halten, d. h. die Fehlerkoordinate ξ soll gegen Null gehen. Der ideale Grenzfall $\xi=0$ wird an sich angestrebt, kann aber grundsätzlich nicht exakt erreicht werden, da ein Freiheitsgrad der Bewegung für N gegen A besteht. Treten irgendwelche Bewegungsstörungen und als Folge davon irgendwelche ξ-Werte auf, so dienen diese vielmehr gerade als Fühl- und Anzeigegröße für eine Steuerungskraft P, die auf den Knopf K entweder unmittelbar von Hand oder von einer Steuerungsautomatik ausgeübt wird, um die gewünschte Synchronisation und Stabilisierung von N gegen A herzustellen. Das Steuerungsgesetz für P als Funktion der Fühlgröße wird weiter unten aufgestellt und begründet.

Gewöhnlich soll durch eine solche Vorrichtung die Geschwindigkeit von A gemessen werden, was dadurch geschieht, daß mit N ein Tachometer gekuppelt wird. Eine unmittelbare Kuppelung mit A hingegen soll nicht möglich sein: es wird vorausgesetzt, daß A entweder nur ein leichter, gegen Rückwirkung empfindlicher Zeiger oder eine bloße Lichtprojektion eines entfernten Objekts ist. Zunächst wird der Bewegungsverlauf von N gegen A für das direkte Nachführgetriebe von Abb. 1 untersucht, da hier die Zusammenhänge am einfachsten und übersichtlichsten sind. Die Untersuchung wird darnach auf einige zusammengesetzte und häufiger verwendete Getriebeformen erweitert. Man findet dabei, daß die Bewegung dann möglichst schnell in die Deckungsstellung einläuft, wenn gewisse Bedingungen zwischen bestimmten Kenngrößen des Vorgangs erfüllt sind. Als Ergebnis werden diese sogenannten „Abstimmbedingungen" aufgestellt und die Fehlergrenzen für die Geschwindigkeitsmessung angegeben.

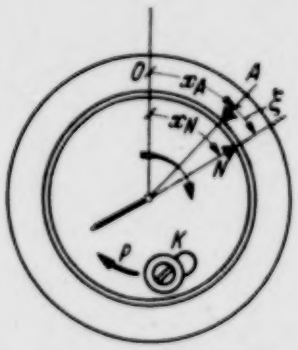


Abb. 1. Direktes Nachführgetriebe (Drehschema).

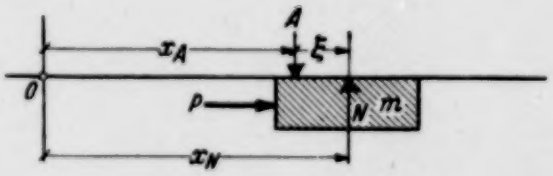


Abb. 2. Direktes Nachführgetriebe (Abwicklungsschema).

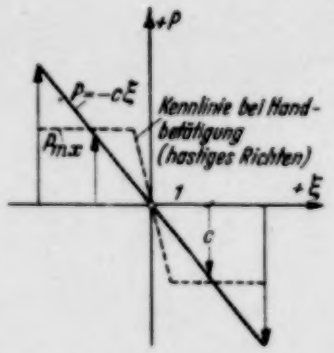


Abb. 3. Diagramm der Richtkraft.

2. Direktes Nachführgetriebe (Getriebe A). a) Aufbauschema. Um die Aufbauschemen der Bauarten zu vereinfachen, werden sie in abgewickelter Form dargestellt: Abb. 2 ist die Abwicklung eines direkten Nachführgetriebes nach Abb. 1. Die eingeschriebenen Koordinaten können also wahlweise Linear- oder Winkelkoordinaten bedeuten. Das nachzuführende Teil N habe die Masse m und bewege sich in Führungsschienen mit praktisch vernachlässigbarer Reibung, wie es in Ausführungsbeispielen angestrebt und auch tatsächlich verwirklicht wird.

b) Steuerungskraft. Das System wird aufgefaßt als ein Massenpunkt mit einem Freiheitsgrad der Bewegung unter der Einwirkung der Steuerungskraft P. Für P wird angesetzt

$$P=-c\,\xi-d\,\dot{\xi}\,. \tag{1}$$

Der Ausdruck besteht aus einem Richtglied (Richtkonstante c) und einem Dämpfglied (Dämpfkonstante d) nach Art motorischer Steuerungsautomatiken (Servomechanismen). Dieser Ansatz erfaßt auch gleichzeitig das Wesentliche beim Handantrieb. In Abb. 3 ist der lineare Verlauf des Richtglieds dargestellt. Bei hastiger Richtbetätigung von Hand wäre beispielsweise eine sehr steile

Kennlinie zu erwarten, die dann sehr bald in die obere Grenze der größtmöglichen Handkraft umbiegt. Man erhält so unter Umständen eine stark verformte Kennlinie, die man aber stets durch eine gerade Linie ausmitteln kann. Der Bewegungsverlauf, der sich aus der mittleren Kennlinie ergibt, muß dann im Mittel auch mit dem tatsächlichen Verlauf übereinstimmen.

Bei der Handbetätigung sind weitere Grenzen physiologischer Art zu beachten, nämlich Grenzen für die maximale Leistung L_{mx}, die maximale Umfangskraft P_{mx} am Handrad und die maximale Umfangsgeschwindigkeit v_{mx}. In Abb. 4 sind diese Grenzen nach Zahlenwerten aufgezeichnet, wie sie beispielsweise aus „Hütte", Bd. 2, zu entnehmen sind. Für feinfühliges Richten darf nur ein Bruchteil der Grenzwerte ausgenutzt werden. Auch eine Dämpfung nach (1) ist bei Handbetätigung möglich: dies kommt einfach darauf hinaus, daß die Kraft P bereits vor Durchgang der Marke N durch A ($\xi=0$) in ihrem Richtungssinn umgekehrt wird (Phasenlage von P siehe weiter unten). Natürlich werden hierbei Schwankungen zu erwarten sein nach Maßgabe von Übung und Geschicklichkeit der sich betätigenden Person.

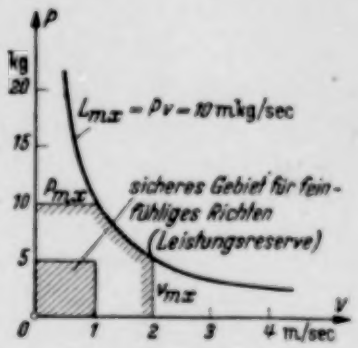


Abb. 4. Leistungsgrenzen beim handbetätigten Richten.

c) Bewegungsgleichung. Die Bewegungsgleichung ergibt sich mit (1) zu

$$m\ddot{x}_N = P = -c\xi - d\dot{\xi};$$

x_N wird eliminiert mit

$$x_N = x_A + \xi,$$

und es werden die aus der Schwingungslehre bekannten Abkürzungen eingeführt

$$\frac{c}{m} \equiv \omega_0^2 \text{ (Nullfrequenz)}, \qquad \frac{d}{m} \equiv 2\delta \text{ (Dämpfung)}. \tag{2}$$

Damit ergibt sich die bekannte Differentialgleichung der gedämpften Schwingung

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\ddot{x}_A. \tag{3}$$

Um nun die Umstände aufzuklären, unter denen die Bedingung $\xi \to 0$ möglichst gut erreicht wird, muß der Bewegungsverlauf bei gegebener Störfunktion x_A untersucht werden. Es empfiehlt sich, als Störung einen Sprung in der Geschwindigkeit v_A zugrunde zu legen, wie es für Stabilitätsuntersuchungen üblich ist (Abb. 6):

$$\left.\begin{aligned} t<0: \quad & \dot{x}_A = v_A = 0, \qquad \ddot{x}_A = 0; \\ t>0: \quad & \dot{x}_A = v_A = \text{konst.}, \qquad \ddot{x}_A = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Man macht in bekannter Weise den Lösungsansatz

$$\xi = \mathfrak{B} e^{\lambda t}. \tag{5}$$

Dabei bedeutet λ allgemein eine komplexe Frequenz (gedämpfte Schwingung); sie ergibt sich durch Einsetzen von (5) in (3) aus der sogenannten Frequenzgleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

als

$$\lambda = -\delta + i\omega \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \text{ (Kreisfrequenz)}.$$

Für periodische Bewegungen muß $\omega_0 > \delta$ sein. Es empfiehlt sich, folgende dimensionslose Kennzahlen einzuführen, durch Bezugnahme auf die Nullfrequenz ω_0:

$$\left.\begin{aligned} & D \equiv \frac{\delta}{\omega_0} \text{ (Dämpfzahl)}, \quad \Omega \equiv \frac{\omega}{\omega_0} \text{ (Frequenzzahl)}, \\ & \tau \equiv \omega_0 t \text{ (dimensionslose Zeit, Zeitwinkel)}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

und damit

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda}{\omega_0} = -D + i\Omega, \qquad |\Lambda| = 1.$$

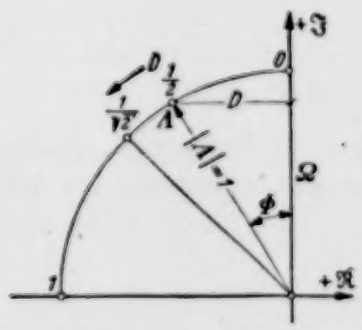


Abb. 5. Wurzelfeld Λ für Getriebe A.

Werden die Wurzeln Λ in der komplexen Zahlenebene für verschiedene Zahlenwerte des Parameters D (0 bis 1) aufgetragen, so ergibt sich ein Ursprungskreis vom Halbmesser 1 (Abb. 5). Die Amplitude $\mathfrak{B}$ von (5) ist die Integrationskonstante, die man zur Vereinfachung der Zahlenrechnung

als komplexe Größe auffaßt; sie wird aus den Anfangsbedingungen für $t=0$ bestimmt:

$$\xi=0\,, \qquad \dot{\xi}=-v_A$$

Außerdem interessiert noch die Geschwindigkeitsanzeige v_N des Nachführgetriebes; sie ergibt sich aus x_N durch Differentiieren:

$$\dot{x}_N = v_N = v_A + \dot{\xi}\,.$$

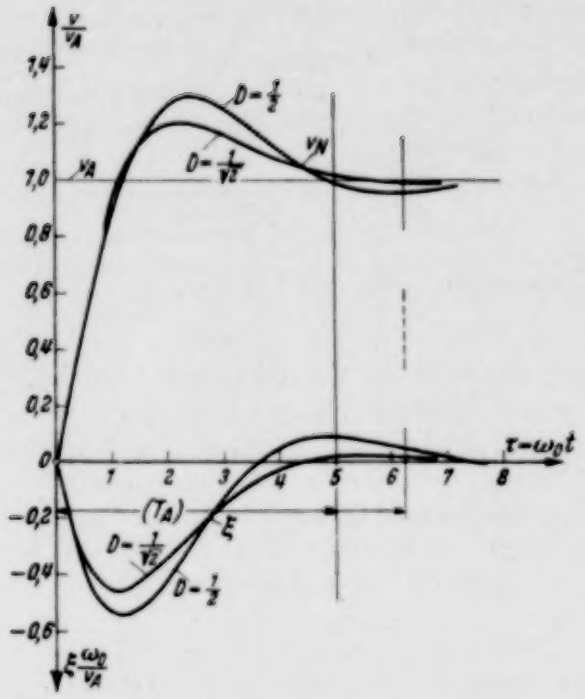


Abb. 6. Anlauf von Getriebe A bei v_A-Sprung.

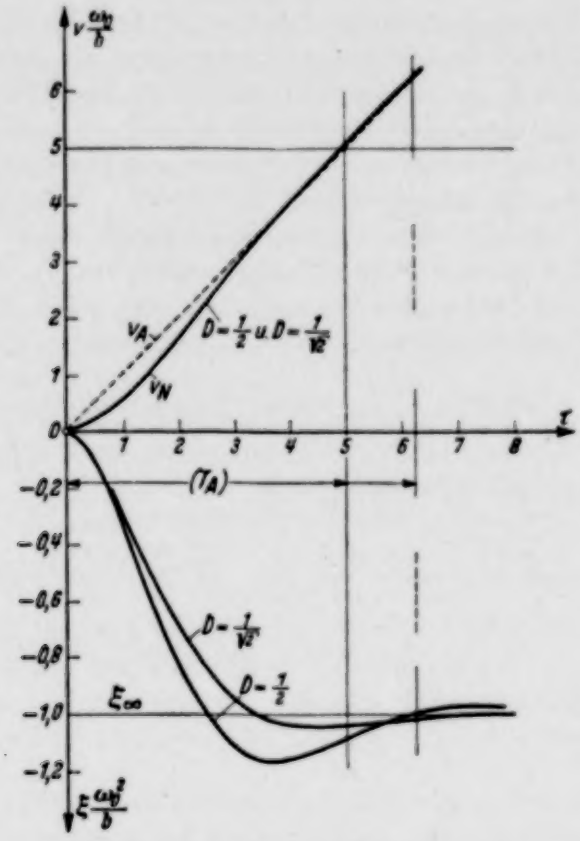


Abb. 7. Anlauf von Getriebe A bei linearem v_A.

d) Bewegungsverlauf für v_A-Sprung. Die Ergebnisse der Berechnung für ξ und v_N sind in Abb. 6 als dimensionslose Kennzahlen für gebräuchliche Werte des Parameters D aufgetragen. Man ersieht daraus, daß die günstigsten Verhältnise für den Einlaufvorgang ungefähr bei

$$D=\frac{1}{2} \text{ bis } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

liegen; bei noch größerer Dämpfung würden sich nur längere Einlaufzeiten (kriechende Einstellung) ergeben. Die stationären Endwerte für ξ und v_N sind nach der Anlaufzeit T_A

$$T_A \approx \frac{5}{\omega_0} \text{ bis } \frac{2\pi}{\omega_0}$$

erreicht. Es ist also

$$T_A \approx T_0 \tag{7}$$

mit der Schwingungszeit $T_0=2\pi/\omega_0$ der Nullfrequenz. Die größten Werte des Überpendelns Δv_N von v_N innerhalb der Anlaufzeit ergeben sich zahlenmäßig

$$\text{für } D=\frac{1}{2}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{zu } \frac{\Delta v_N}{v_A}=0{,}298\,, \qquad 0{,}208\,.$$

Bei Handantrieb ist für ω_0 eine obere Grenze vorhanden, die aus der Reaktionsgeschwindigkeit des menschlichen Organismus folgt. Man schätzt $T_{0\min}\approx 1/2$ sek als kleinste Schwingungsdauer einer von Hand noch abbildbaren Schwingungsbewegung. Damit ergibt sich

$$T_{A\min}\approx\frac{1}{2}\text{ sek} \quad \text{(Handantrieb)}.$$

e) Linearer Anlauf von v_A. Die Integration von (3) läßt sich auch noch für den Fall eines linearen Anlaufs von v_A durchführen:

$$\dot{x}_A = v_A = bt, \quad \ddot{x}_A = \dot{v}_A = b.$$

Der Lösungsansatz ist hier durch ein Partikularintegral als Zusatzglied zu erweitern:

$$\xi = \xi_\infty + \mathfrak{B} e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \xi_\infty = -\frac{b}{\omega_0^2},$$

und zwar bedeutet ξ_∞ einen konstanten Endwert für $t \to \infty$, der sich einstellt, nachdem der Einlaufvorgang abgeklungen ist. Die Integrationskonstanten folgen aus den Anfangsbedingungen für $t = 0$:

$$\xi = 0, \quad \dot{\xi} = 0, \quad \text{da } v_N = 0 \text{ und } v_A = 0.$$

Damit liegt der Bewegungsverlauf fest; er ist in Abb. 7 in dimensionslosen Kennzahlen aufgezeichnet. Es ergeben sich ungefähr dieselben günstigsten Dämpfzahlen und dieselbe Anlaufzeit T_A wie im ersten Fall. Die größten Abweichungen Δv_N vom Sollwert innerhalb der Anlaufperiode findet man zahlenmäßig

$$\text{für } D = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{zu } \Delta v_N \frac{\omega_0}{b} = 0{,}546, \qquad 0{,}456;$$

sie sind praktisch kleiner als beim Rechteckstoß wegen der vergleichsweise stetigeren Übergänge.

f) Phasenlage von P. Aus (1) ergibt sich durch Einsetzen von (5)

$$P = (-c\,\mathfrak{B} - d\lambda\mathfrak{B}) e^{\lambda t} \equiv \mathfrak{P} e^{\lambda t}, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{P} \equiv \mathfrak{P}_c + \mathfrak{P}_d, \quad \mathfrak{P}_c \equiv -c\,\mathfrak{B}, \quad \mathfrak{P}_d \equiv -d\lambda\,\mathfrak{B}.$$

Die Größen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}$ werden in bekannter Weise als Zeiger in der komplexen Zahlenebene dargestellt (Abb. 8). $\mathfrak{B}$ werde in die reelle Achse gelegt. Es ergibt sich durch Division, und mit (2) und (6)

$$\frac{\mathfrak{P}_d}{\mathfrak{P}_c} = \frac{d\lambda}{c} = \frac{2\delta\lambda}{\omega_0^2} = 2DA. \tag{8}$$

Setzt man zunächst einmal $c = 1/|\mathfrak{B}|$, so ist $\mathfrak{P}_c = -1$ und $\mathfrak{P}_d = -2DA$, d. h. $\mathfrak{P}_d$ wird antiparallel zu A. Wie man sieht, sind die schraffierten Dreiecke in Abb. 8 kongruent, und daraus folgt, daß die Ortskurve der Resultierenden $\mathfrak{P}$ ein Kreis um 0 ist, also $|\mathfrak{P}| = \text{konst.} = \mathfrak{P}_c$. Die Phasenvoreilung φ von $\mathfrak{P}$ gegen $\mathfrak{P}_c$ ergibt sich zu

$$\varphi = 2\Phi \quad \text{mit} \quad \sin\Phi = D,$$

also zahlenmäßig

$$\text{für } D = \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{zu } \varphi = 60°, \qquad 90°.$$

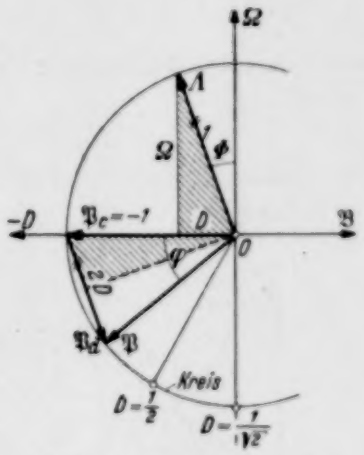


Abb. 8. Phasenlage von $\mathfrak{P}$.

g) Innere Abstimmbedingung. Eine Phasenverschiebung von 90° ($D = 1/\sqrt{2}$) stellt andererseits bei Handantrieb eine Grenze dar, die aus psychologischen Gründen nicht überschritten werden darf, wenn $\mathfrak{P}$ noch sinnfällig als rückführend und dämpfend mit der Bewegung von ξ verknüpft bleiben soll: bei $\varphi > 90°$ würde $\mathfrak{P}$ in einem gewissen Zeitintervall vor der Bewegungsumkehr im Sinne von Ausschlagvergrößerung wirken. Beachtet man gleichzeitig Ziff. 2 d), so ergibt sich für D die Vorschrift

$$\frac{1}{2} \leqq D \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{9}$$

die zu einem möglichst günstigen Einlauf führt; sie werde daher als innere Abstimmbedingung des Getriebes A bezeichnet.

h) Allgemeiner Bewegungsverlauf, äußere Abstimmbedingung. Mit den obigen Ergebnissen des Bewegungsablaufs bei speziellen Störfunktionen v_A nach Abb. 6 und 7 läßt sich

auch der Bewegungsverlauf bei allgemeinem v_A angeben, wie es in Abb. 9 für einen Rechteckstoß und in Abb. 10 für einen dreieckförmigen Verlauf von v_A dargestellt ist. Allgemeine Formen lassen sich dadurch erfassen, daß man sie in Treppenstufen oder Trapezstreifen (wie in Abb. 11) unterteilt. Allen diesen Formen ist gemeinsam, daß nach Ablauf einer kurzdauernden Störung, deren

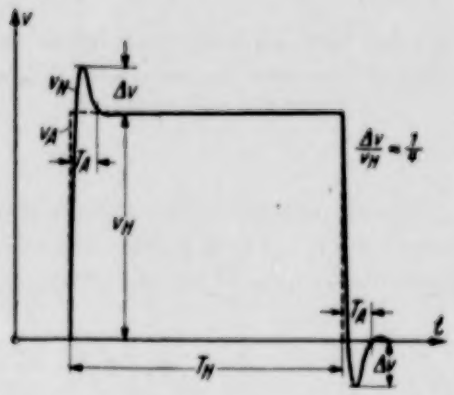


Abb. 9. Rechteckverlauf von v.

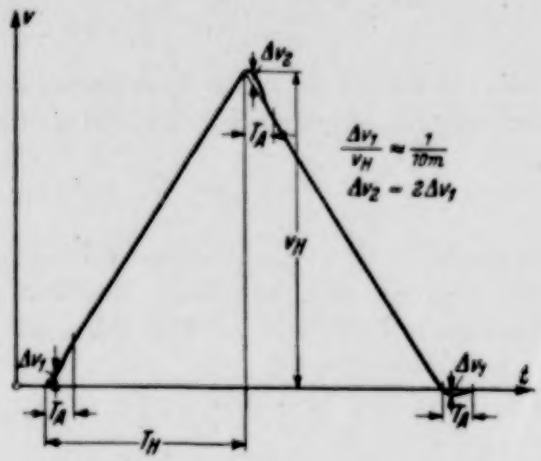


Abb. 10. Dreieckförmiger Verlauf von v.

Zeitdauer ungefähr gleich der Anlaufzeit T_A ist, die v_N-Kurve praktisch mit der v_A-Kurve übereinstimmt; dies ist aber gerade das, was man durch das Nachführgetriebe erreichen will. Als Voraussetzung für diese Vereinfachung muß man jedoch fordern

$$T_H \gg T_A \quad \text{oder} \quad \frac{T_H}{T_A} = m \gg 1, \tag{10}$$

wo T_H „Haupt-Zeitintervalle" bedeuten sollen, d. h. definitionsgemäß solche Intervalle, innerhalb deren die Funktion v_A monoton bleibt. Diese Beziehung werde als äußere Abstimmbedingung bezeichnet. Die größten Abweichungen Δv in der Geschwindigkeitsanzeige treten innerhalb der Anlaufintervalle auf und ergeben sich bei Einhaltung der inneren Abstimmbedingung (9) und bei Rechteckverlauf (Abb. 9) zu

$$\Delta v \approx \frac{1}{4} v_A$$

und bei dreieckförmigem Verlauf (Abb. 10) zu

$$\Delta v_1 \approx \frac{1}{10\,m} v_H, \qquad \Delta v_2 = 2\Delta v_1.$$

Die Abweichungen sind natürlich bei den stetigeren Übergängen von Abb. 10 wesentlich kleiner als bei Abb. 9.

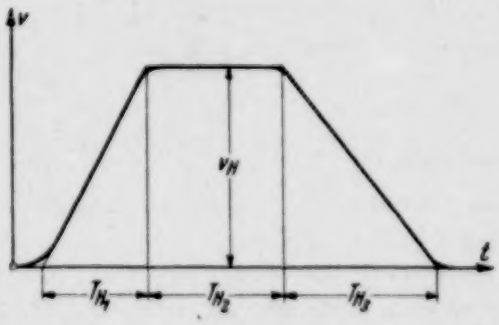


Abb. 11. Allgemeiner Verlauf von v.

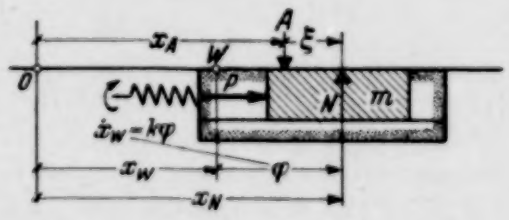


Abb. 12. Weg-Geschwindigkeits-Getriebe (B).

3. Weg-Geschwindigkeits-Getriebe (Getriebe B). a) Aufbauschema. Wenn die mit dem Zeiger N (Abb. 2) verbundene Masse zu groß wird, sind, besonders bei Handantrieb, lange Anlaufzeiten T_A und damit Schleppverzüge in der Anzeige trotz großen Kraftaufwands P die Folge. Um diese Nachteile zu beseitigen, wird die Hauptmasse des Geräts (als Wagen W bezeichnet) von N abgetrennt und von einem besonderen Motor angetrieben, der gleichzeitig zur Geschwindigkeitsmessung herangezogen wird. Diese häufig angewandte Bauart ist in Abb. 12 als Abwicklungsschema skizziert. Der Zeiger N kann nun wieder genügend leicht ausgeführt werden; er ist in einer

Führung von W reibungsfrei beweglich, und es wirkt auf ihn die Steuerungskraft P ein. Die Antriebsgeschwindigkeit $\dot{x}_W$ des Motors wird so eingestellt, daß sie einer Verschiebung φ des Zeigers N gegen eine Wagenmarke W also einem Weg proportional ist:

$$\dot{x}_W = k\varphi \tag{11}$$

mit $k\,[sek^{-1}]$ als Proportionalitätskonstante. Auf Grund dieser Beziehung wird diese Bauart als Weg-Geschwindigkeitsgetriebe bezeichnet[1]. Es wird vorausgesetzt, daß der Motor stark genug ist, um ohne merkliche Verzugszeit die Beziehung (11) einzuhalten. Für den Fall des stationären Zustands ist $\dot{x}_W = \dot{x}_A \equiv v_A = \text{konst.}$, und damit aus (11)

$$\varphi_{stat} \equiv \varphi_A = \frac{v_A}{k}\,. \tag{12}$$

Der Ausschlag φ ist also ein Maß für die Geschwindigkeit v_W bzw. v_A.

b) Bewegungsgleichungen. Die Bewegung des Zeigers N für sich allein ist bereits in Ziff. 2 untersucht. Zu seiner Bewegungsgleichung (3) mit den Abkürzungen (2) tritt zusätzlich die Beziehung (11) hinzu. Hierin eliminiert man zweckmäßig die Koordinate x_W durch

$$x_W = x_A + \xi - \varphi\,,$$

was aus dem geometrischen Zusammenhang nach Abb. 12 folgt. Damit ergibt sich das System der Bewegungsgleichungen

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = -\ddot{x}_A\,, \tag{3}$$

$$-\dot{\xi} + \dot{\varphi} + k\varphi = \dot{x}_A\,. \tag{13}$$

Der weiteren Untersuchung werde wieder ein v_A-Sprung (4) zugrunde gelegt. Der Lösungsansatz ist dann

$$\varphi = \varphi_A + \sum \mathfrak{A} e^{\lambda t} \quad \text{mit} \quad \varphi_A \equiv \frac{v_A}{k}\,, \quad \text{und} \quad \xi = \sum \mathfrak{B} e^{\lambda t}.$$

Damit ergibt sich die Frequenzgleichung

$$(\lambda + k)\,(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) = 0\,. \tag{14}$$

Aus dem ersten Faktor folgt die reelle Wurzel

$$\lambda_1 = -k\,,$$

die stets einen negativen Wert hat und also eine abklingende e-Funktion darstellt, die hauptsächlich den Einlauf von φ beschreibt. Aus dem zweiten Faktor ergibt sich die komplexe Frequenz

$$\lambda_2 = -\delta + i\omega \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2\,,$$

die einer gedämpften Schwingung entspricht und die Störschwingung von ξ erfaßt.

c) Grenzfall großer Stabilität in der Einstellung des Zeigers N auf A. Es werde δ und ω_0^2 sehr groß gemacht, also

$$\delta \to \infty\,, \quad \omega_0^2 \to \infty\,;$$

dann folgt aus (3) $\xi \to 0$.

Damit vereinfacht sich (13a) zu

$$\dot{\varphi} + k\varphi = v_A\,,$$

mit der Lösung

$$\varphi_{gr} = \varphi_A(1 - e^{-kt})\,. \tag{15}$$

Dies ist eine abklingende e-Funktion mit der Relaxationszeit $T_k = 1/k$.

Die Lösung (15) stellt den idealen Grenzfall für das Einlaufen der Anzeige φ dar, und man strebt an, ihn bei dem tatsächlichen Bewegungsverlauf genügend genau anzunähern. Wie groß muß nun zu diesem Zweck δ und ω_0^2 praktisch gemacht werden?

d) Innere Abstimmbedingung. Die Antwort auf diese Frage folgt aus der Überlegung, daß der λ_2-Anteil der Störbewegung aus (14) mindestens so schnell abklingen soll, wie der ideale Grenzfall (15), somit

$$\delta \gtrsim k\,,$$

und durch Division mit ω_0

$$\frac{\omega_0}{k} \gtrsim \frac{1}{D} \quad \text{oder} \quad \omega_0 \gtrsim \frac{k}{D}\,. \tag{16}$$

Die Beziehung (16) für den Getriebeparameter ω_0/k ergänzt (9), und beide zusammen sind die innere Abstimmbedingung der Getriebebauart B.

[1] Siehe etwa *A. Kuhlenkamp*, Flakkommandogeräte, S. 104. Berlin 1943.

e) Bewegungsverlauf für v_A-Sprung. Als nächster Schritt werde die Aufgabe gelöst, den Einlaufvorgang von φ und ξ für verschiedene Werte des Parameters ω_0/k darzustellen, um deren Einfluß auf die Abstimmung des Abklingens zu zeigen. Man geht von der Auffassung aus, daß die Getriebekonstante k gegeben sei, und daß man die Nullfrequenz ω_0 und den Getriebeparameter ω_0/k nach Tabelle 1 zunehmen läßt, wobei die Dämpfung δ durch $D \equiv \dfrac{\delta}{\omega_0} = 1/2$ festliege.

Tabelle 1. $D \equiv \delta/\omega_0 = 1/2$.

System Nr.	I	II	III
$\omega_0/k =$	1	2	4

Die Zahlenwerte sind so gewählt, daß bei System II die innere Abstimmbedingung (16) gerade erfüllt ist, die Dämpfung also den optimalen Wert hat, wogegen bei III die Dämpfung übersteigert und bei I deutlich ungenügend ist. Die Integrationskonstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t=0$ bestimmt:

$$\xi = 0\,, \qquad \varphi = 0\,, \qquad \dot{\varphi} = 0\,,$$

deren letzte aus $v_N = v_W = 0$ und $v_W = v_N - \dot{\varphi}$ folgt. Damit erhält man die Koordinaten φ und ξ. Die Ergebnisse der Rechnung sind in dem Diagramm von Abb. 13 in dimensionslosen Kennzahlen φ/φ_A, ξ/φ_A, $\bar{t} \equiv kt$ aufgetragen. Man ersieht daraus anschaulich, daß tatsächlich vom System II ab, also bei Einhaltung der inneren Abstimmbedingung, der Verlauf von φ im zeitlichen Mittel, und zwar bereits innerhalb der Anlaufperiode, mit φ_{gr} übereinstimmt und somit die Fehlerkoordinate ξ im zeitlichen Mittel wie vorgeschrieben Null wird. Für die Anlaufperiode oder die Anlaufzeit T_B schätzt man dabei ab:

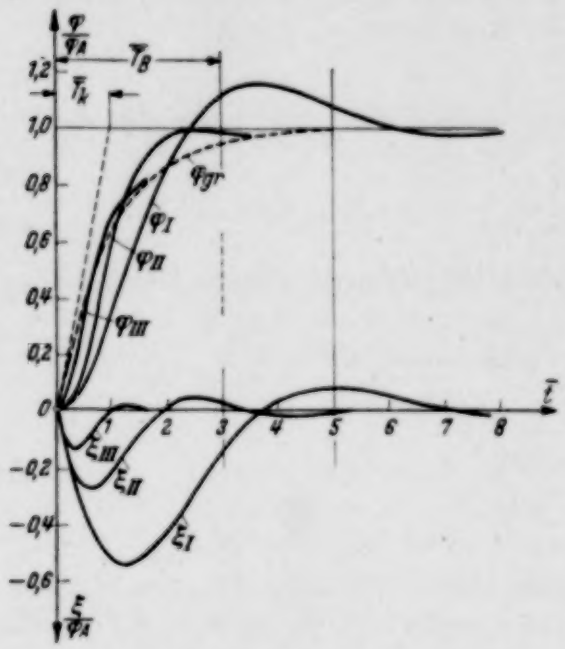


Abb. 13. Anlauf von Getriebe B bei v_A-Sprung.

$$T_B \approx 3\,T_k = \frac{3}{k}\,. \tag{17}$$

Ein weiterer Zusammenhang ergibt sich zwischen der Anlaufzeit T_A des Zeigers N und T_B des φ-Getriebes durch Division der entsprechenden Gleichungen:

$$\frac{T_A}{T_B} \approx \frac{6}{\omega_0}\,\frac{k}{3} = \frac{2k}{\omega_0}$$

und mit (9) und (16)

$$\frac{T_A}{T_B} \lessapprox 1 \quad \text{oder} \quad T_A \lessapprox T_B. \tag{18}$$

Dies ist nichts anderes als wiederum die innere Abstimmbedingung in anderer Gestalt und auf anschauliche Weise ausgedrückt.

f) Allgemeiner Bewegungsverlauf, äußere Abstimmbedingung. Wenn die vorgegebene Bewegung x_A eine beliebige Funktion ist, so muß auf die allgemeinen Bewegungsgleichungen (3) und (13) zurückgegriffen werden. Die Integration dieses Systems gelingt in einfacher Weise als Näherung, wenn die innere Abstimmbedingung erfüllt ist, und daher $\xi \to 0$ gilt. Damit ergibt sich aus (13) und nach geeigneter Umstellung

$$k\varphi = v_A - \dot{\varphi} \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \varphi_A - T_k\,\dot{\varphi}\,,$$

wo $\varphi_A \equiv \dot{x}_A/k = v_A/k$ der „Sollwert" der momentanen Geschwindigkeitsanzeige ist, also eine beliebige Zeitfunktion wie v_A. Unter der Voraussetzung

$$T_k\,\dot{\varphi} \ll \varphi_A\,. \tag{19}$$

die weiter unten näher diskutiert wird, läßt sich die obige Gleichung durch Iteration auflösen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{erster Schritt:} \quad \varphi \approx \varphi_A, \quad \text{differentiiert } \dot{\varphi} \approx \dot{\varphi}_A\,; \\ &\text{zweiter Schritt:} \quad \varphi \approx \varphi_A - T_k\,\dot{\varphi}_A\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Dieses Ergebnis ist einfach und anschaulich zu deuten (Abb. 14): die φ-Kurve (tatsächliche Geschwindigkeitsanzeige) ist gegen die φ_A-Kurve (vorgegebener Sollwert) um den Betrag T_k parallel verschoben, mit andern Worten, hat die Nacheilung T_k. Dabei muß allerdings die Voraussetzung erfüllt sein, daß T_k noch genau genug als Zeitdifferential aufgefaßt werden kann. Dies ist der Fall, wenn

$$T_H \gg T_k \qquad \text{oder} \qquad \frac{T_H}{T_k} = m \gg 1 \tag{21}$$

ist, wie man aus Abb. 14 anschaulich sieht. Im Mittel ist $\dot{\varphi} \approx \varphi_H / T_H$; dieser Wert in (19) eingesetzt ergibt $T_k \varphi_H / T_H \ll \varphi_A$, oder, da φ_A und φ_H von derselben Größenordnung sind,

$$T_H \gg T_k .$$

Die Bedingung (19) führt also ebenfalls auf die Beziehung (21), die als äußere Abstimmbedingung bezeichnet werde, im Anschluß an den Vorgang von Ziff. 2 (10).

Die Geschwindigkeitsanzeige φ ist hier mit einem grundsätzlichen Schleppfehler $\Delta\varphi$ behaftet; man liest dafür aus Abb. 14 folgende Proportion ab:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_H} = \frac{\Delta v}{v_H} = \frac{T_k}{T_H} = \frac{1}{m} . \tag{22}$$

Bei praktischen Ausführungen wird häufig gewählt:

$$T_k = \frac{\varphi}{v} = \frac{10\,m}{3\ \text{m/sek}} = 3{,}3\ \text{sek}.$$

Fordert man für den relativen Fehler $\frac{\Delta\varphi}{\varphi_H} \leqq 5\,\%$, so folgt aus (22)

$$T_H \geqq \frac{3{,}3}{0{,}05} = 66\ \text{sek} ,$$

d. h. die φ-Anzeige der Bauart B üblicher Ausführung ist nur für langsam veränderliche oder quasistationäre Vorgänge brauchbar.

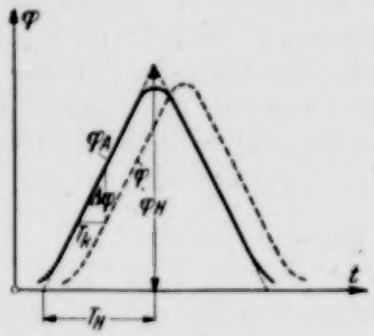


Abb. 14. Allgemeiner Verlauf der Geschwindigkeitsanzeige φ.

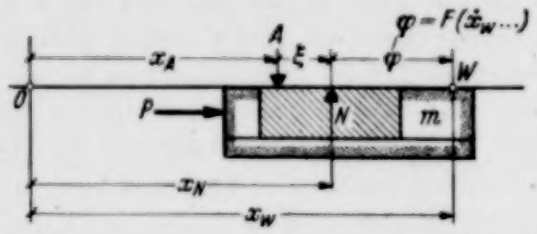


Abb. 15. Vorlauf-Getriebe(C).

4. Vorlauf-Getriebe (Getriebe C). a) Aufbauschema. Dieses Getriebe ist in mancher Beziehung mit der Bauart B verwandt. Es ist ebenfalls in einen Wagen W, der praktisch die Gesamtmasse m des Getriebes umfaßt, und einen leichten Zeiger N unterteilt (Abb. 15). Die Anzeigestrecke φ für die Geschwindigkeit $\dot{x}_W$ wird hier aber in Richtung der Bewegung (vorwärts) aufgetragen, im Gegensatz zu B, wo φ als Schleppstrecke aufzufassen ist. Deshalb werde diese Bauart als Vorlauf-Getriebe bezeichnet. In der praktischen Anwendung können solche Bauarten bei Kupplungsgetrieben zur Darstellung beispielsweise von Vorlauf-Rutschstrecken benützt werden.

Die Steuerungskraft P greift hier unmittelbar an W an. Aus Abb. 15 folgen die geometrischen Lagebeziehungen

$$x_W = x_A + \varphi + \xi , \tag{23}$$

$$x_N = x_W - \varphi . \tag{24}$$

b) Geschwindigkeitsmessung. Die Geschwindigkeitsanzeige φ erfolgt durch einen leichten und daher empfindlichen Mechanismus, der keinerlei Belastung durch Antriebswiderstände anderer schwerer Getriebeteile verträgt. Bekannt sind Bauarten mittels Tachodynamo-Drehspulgerät, Schleppkreisel oder Reibgetriebe. Die letzte Bauart, die in der Praxis häufig angewandt wird, ist

in Abb. 16 als Beispiel skizziert. Die Reibscheibe 1 dreht sich mit der gegebenen, hier konstanten Winkelgeschwindigkeit k und überträgt auf die Reibrolle 2, die im Abstand φ sitzt, die Umfangsgeschwindigkeit φk; die Stellkoordinate φ von 2 ist dabei die Anzeigegröße für die Geschwindigkeit $\dot{x}_W$, was weiter unten nachgewiesen wird. Die Rolle 2 dreht die Nutwelle 3 und damit das eine Seitenrad des Planetengetriebes 4 mit der Winkelgeschwindigkeit $\varphi k/r$, wo r der Halbmesser der Rolle 2 ist. Das andere Seitenrad von 4 wird vom Wagen W her mit einer Winkelgeschwindigkeit $c_1 \dot{x}_W$ gedreht, mit c_1 als Proportionalitätskonstante. Das Mittenrad hat dann die Winkelgeschwindigkeit $c_1 \dot{x}_W - k\varphi/r$ und treibt mit diesem Wert die Verstellspindel 5 an, die dem Anzeigeglied 2 die Stellgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ erteilt. Es ist

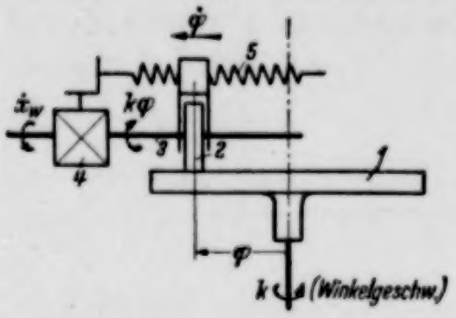


Abb. 16. Geschwindigkeitsmessung.

$$\dot{\varphi} = c_2 \left(c_1 \dot{x}_W - \frac{k\varphi}{r} \right) = c_1 c_2 \left(\dot{x}_W - \frac{1}{c_1 r} k\varphi \right).$$

Das Getriebe ist so abgeglichen, daß $1/c_1 r = 1$ wird; die Konstante $c_1 c_2$ kann als ein Übersetzungsverhältnis aufgefaßt werden und wird abgekürzt mit f bezeichnet. Damit kommt

$$\dot{\varphi} = f(\dot{x}_W - k\varphi). \tag{25}$$

Für den stationären Fall mit

$$\dot{x}_W = \dot{x}_A = v_A = \text{konst.}, \qquad \dot{\varphi} = 0$$

folgt daraus

$$k\varphi_{\text{stat}} = v_A, \qquad \varphi_{\text{stat}} = \varphi_A = \frac{v_A}{k},$$

womit nachgewiesen ist, daß der Ausschlag φ_{stat} ein Maß für die Geschwindigkeit v_A darstellt [siehe Gleichung (12)].

c) Übersetzungsverhältnis f. Der Getriebeparameter f in (25) ist von grundlegender Bedeutung. Wie groß soll sein Zahlenwert zweckmäßig gemacht werden? Nach (25) wäre man versucht, f möglichst groß zu wählen, denn je größer $\dot{\varphi}$, desto schneller vollzieht sich der Einlauf. Einer beliebigen Zunahme von f stehen jedoch obere Grenzen entgegen, die durch Stabilitätsbedingungen gesetzt sind. Man gehe von einem stationären Anfangszustand aus und erteile dem Antrieb einen Stoß mit der Geschwindigkeitszunahme $\Delta \dot{x}_W$. Dann ergibt sich aus (25) für $t=0$, $\Delta\varphi = 0$ durch Variieren $\Delta\dot{\varphi} = f \Delta \dot{x}_W$ und mit (24)

$$\Delta \dot{x}_N = \Delta \dot{x}_W - \Delta \dot{\varphi} = \Delta \dot{x}_W (1-f).$$

Für $f=1$ stellt sich danach die Anomalie ein, daß trotz Zunahme der Antriebsgeschwindigkeit $\Delta \dot{x}_W$ keine Zunahme der Geschwindigkeit des Zeigers N sichtbar wird ($\Delta \dot{x}_N = 0$). Demgegenüber muß insbesondere bei Handbetätigung gefordert werden, daß eine der Bewegungsrichtung nach sinngemäße Zuordnung besteht zwischen der Antriebssteigerung bei W als Ursache und der sichtbaren Bewegungsänderung bei N als Wirkung, woraus von vornherein folgt

$$f < 1.$$

In der Anwendung hat sich auf Grund praktischer Erfahrung der Wert

$$f \approx 0{,}7$$

herausgebildet; man muß nämlich aus Gründen der Stabilität einen gewissen Sicherheitsabstand von $f=1$ einhalten. Diese Zusammenhänge werden weiter unten eingehend erläutert.

d) Bewegungsgleichungen. Zur exakten Untersuchung der Bewegungseigenschaften müssen die Differentialgleichungen der Bewegung aufgestellt und integriert werden. Für den Wagen W, als Massenpunkt aufgefaßt, ergibt sich, ähnlich wie in (3),

$$\ddot{\xi} + 2\delta\dot{\xi} + \omega_0^2 \xi + \ddot{\varphi} = -\ddot{x}_A. \tag{26}$$

Dazu tritt Gleichung (25), in der x_W mittels (23) eliminiert wird:

$$-\dot{\xi} + g\dot{\varphi} + k\varphi = \dot{x}_A, \qquad \text{mit} \qquad g \equiv \frac{1}{f} - 1. \tag{27}$$

Hiermit ist das System der simultanen Differentialgleichungen (26), (27) für die beiden Koordinaten φ, ξ bekannt. Zur Integration werde als Störungsfunktion x_A ein v_A-Sprung nach (4) zugrunde gelegt. Aus dem Lösungsansatz

$$\varphi = \varphi_A + \mathfrak{A} e^{\lambda t}$$

und

$$\xi = \mathfrak{B} e^{\lambda t},$$

ergibt sich das homogene Gleichungssystem der Integrationskonstanten

$$\lambda^2 \mathfrak{A} + (\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2)\,\mathfrak{B} = 0$$

$$(g\lambda + k)\,\mathfrak{A} - \lambda\,\mathfrak{B} = 0$$

und also die Frequenzgleichung

$$(1+g)\,\lambda^3 + (2g\delta + k)\,\lambda^2 + (g\omega_0^2 + 2\delta k)\,\lambda + k\omega_0^2 = 0\,. \tag{28}$$

e) Grenzfall großer Stabilität in der Einstellung des Zeigers N auf A. Ehe die Frequenzgleichung (28) weiter diskutiert wird, sei der Grenzfall sehr großer Steuerungskräfte P behandelt, also $\delta \to \infty$, $\omega_0^2 \to \infty$.

Aus (26) folgt, da $\ddot{x}_A$ und $\ddot{\varphi}$ endlich bleiben müssen, $\xi \to 0$. Damit vereinfacht sich (27) zu

$$g\dot{\varphi} + k\varphi = v_A$$

mit der Lösung

$$\varphi_{gr} = \varphi_A (1 - e^{\lambda_{gr} t})\,, \tag{29}$$

wo

$$\lambda_{gr} \equiv -\frac{k}{g}\,, \quad T_g \equiv \frac{1}{|\lambda_{gr}|} = \frac{g}{k}\ \text{(Relaxationszeit)}$$

ist. Der Einlauf erfolgt also[1] nach der e-Funktion (29) mit der Relaxationszeit T_g. Für $f=1$ oder $g=0$ wäre $T_g=0$; man müßte also für $f=1$ ein unendlich schnelles Einlaufen erwarten. Dies ist jedoch ein Trugschluß, da für $f=1$ die Vereinfachung $\xi \to 0$ nicht mehr zulässig ist. Es sind hier vielmehr Stabilitätskriterien zu beachten, wie im folgenden gezeigt wird.

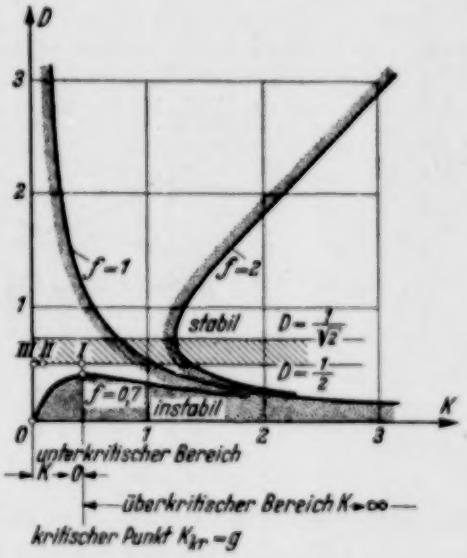


Abb. 17. Stabilitätsfeld.

f) Stabilitätsbedingung. Die Bewegung verläuft stabil, wenn die Wurzeln λ der Frequenzgleichung (28) sich als negative Zahlen, oder bei komplexen Wurzeln sich mit negativem Realteil ergeben. Ob dies zutrifft, kann bereits aus den Koeffizienten der Frequenzgleichung erkannt werden. Das Kriterium hierfür ist von *Hurwitz*[2] in allgemeiner Form aufgestellt worden und lautet für die vorliegende Frequenzgleichung (28)

$$(2g\delta + k)\,(g\omega_0^2 + 2\delta k) \gtrless (1+g)\,k\omega_0^2\,.$$

Zweckmäßig vermindert man die Zahl der Parameter dadurch, daß man die dimensionslosen Kennzahlen einführt

$$D \equiv \frac{\delta}{\omega_0}\,, \qquad K \equiv \frac{k}{\omega_0}\,. \tag{30}$$

Damit ergibt sich als Kriterium

$$4gD^2K + 2D(K^2 + g^2) - K \gtrless 0\,. \tag{31}$$

Das Gleichheitszeichen bedeutet die Stabilitätsgrenze. Man kann diese Beziehung in einem (D, K)-Diagramm mit dem Parameter g oder f darstellen. Es ergibt sich das Stabilitätsfeld von Abb. 17. Zustandspunkte innerhalb der angelegten Bereiche ergeben instabile Bewegungen. Wie man sieht, ist bei jedem K eine bestimmte Mindestdämpfung D nötig, um überhaupt in den stabilen Bereich

[1] Die Theorie für $\xi = 0$ ist dargestellt beispielsweise in Berichten von *Kortum* und *Koch* (siehe Lilienthalbericht Nr. 153, Berlin 1942). Ich selbst hatte Gelegenheit, diese Theorie auf ein Gerät anzuwenden, das von Herrn *A. Kuhlenkamp* zur Verfügung gestellt worden war. Die Unstimmigkeiten, die sich zwischen dieser elementaren Theorie und den Messungen ergaben, haben mich dann veranlaßt, die hier mitgeteilte erweiterte Theorie der Stabilität des Vorgangs auszuarbeiten.

[2] *A. Hurwitz*, Math. Ann. 46 (1895), S. 273.

zu kommen. Für $f=1$ ergibt sich als Stabilitätsgrenze eine gleichseitige Hyperbel, die sich mit D bereits ins Unendliche erstreckt (für $K=0$). Für $f>1$ beginnt sogar der stabile Bereich erst bei einem $K>0$. Die Grenzkurven für $f<1$ zeigen ein Maximum bei $K_{kr}=g$. An dieser Stelle ist die Annäherung an das instabile Gebiet am stärksten. Durch K_{kr} wird die K-Skala in einen überkritischen und einen unterkritischen Bereich unterteilt. Für den überkritischen Bereich $K>K_{kr}$ bis $\to\infty$ folgt aus (27) $\varphi\to 0$; damit geht die Bewegungsgleichung (26) in den Fall von Getriebe A über, der in Ziff. **2** bereits behandelt ist. Für die Anwendung ist aber der unterkritische Bereich $K<K_{kr}$ bis $\to 0$ besonders wichtig, weil man hier große Werte der Geschwindigkeitsanzeige φ erhält, wie aus (27) folgt. In Abb. 17 ist zusätzlich der Bereich der praktisch möglichen Dämpfung $D=1/2$ bis $1/\sqrt{2}$ eingetragen, wie sie in Ziff. **2** diskutiert wurde. Man sieht, daß der mögliche Dämpfungsbereich dem kritischen Punkt für $f=0{,}7$ schon bedenklich nahe rückt. Für $f=1$ ist im unterkritischen Bereich längst keine Stabilität mehr vorhanden.

g) Innere Abstimmbedingung. Es genügt nun nicht, daß bei einem praktisch ausgeführten Getriebe die Stabilitätsbedingung gerade noch erfüllt ist. Man strebt vielmehr danach, den idealen Grenzfall großer Stabilität nach (29) mit im Mittel $\xi\to 0$ möglichst gut anzunähern. Um diese Aufgabe zu lösen, muß zuerst das Wurzelsystem von (28) für die verschiedenen Getriebeparameter zahlenmäßig berechnet werden. Man geht zur Vereinfachung auf die dimensionslosen Größen (30) über, womit (28) lautet

$$(1+g)\,(\lambda)^3+(2\,g\,D+K)\,(\lambda)^2+(g+2\,DK)\,(\lambda)+K=0 \tag{32}$$

mit

$$(\lambda)\equiv\frac{\lambda}{\omega_0}\,.$$

Diese Gleichung hat die reelle, negative Wurzel $(\lambda)_1$, darstellend einen Bewegungsanteil mit abklingender e-Funktion, und das komplexe Wurzelpaar $(\lambda)_2\equiv-(\varrho)\pm i(\mu)$, darstellend eine gedämpfte Schwingungskomponente, die sich dem Einlauf als Störung überlagert. Dieses Wurzelsystem muß mit der Wurzel λ_{gr} des idealen Grenzfalls von (29) verglichen werden, die der Einheitlichkeit halber ebenfalls auf ω_0 bezogen werden muß:

$$|(\lambda)_{gr}|\equiv\left|\frac{\lambda_{gr}}{\omega_0}\right|=\frac{k}{g\,\omega_0}\,.$$

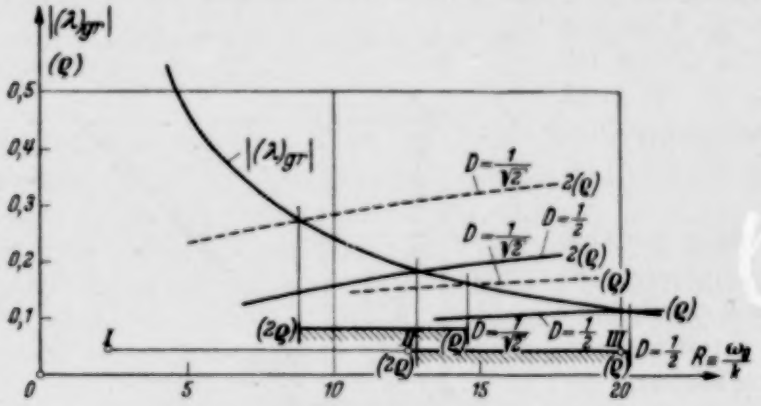


Abb. 18. Abstimmung der Dämpfungen.

Die gesuchte Abstimmbedingung drückt nun aus, daß die Dämpfung (ϱ) der Störschwingung mindestens ungefähr gleich groß wie die Dämpfung $|(\lambda)_{gr}|$ ist:

$$(\varrho)\gtrsim|(\lambda)_{gr}|\quad\text{bei}\quad\frac{(\mu)}{(\varrho)}\approx 1\text{ bis }2. \tag{33}$$

Das ist dieselbe Bedingung wie in Ziff. **3**, d). Die Zahlenrechnung ergibt jedoch hier das Verhältnis $(\mu)/(\varrho)\approx 4$ bis 8. Die größeren Frequenzen wirken sich dahin aus, daß der relative Anteil der Störamplituden von vornherein kleiner wird. Deshalb ist hier die mildere Bedingung zulässig:

$$\varrho\gtrsim\frac{1}{2}\,|(\lambda)_{gr}|\quad\text{oder}\quad 2\varrho\gtrsim|(\lambda)_{gr}|\quad\text{bei}\quad\frac{(\mu)}{(\varrho)}\approx 4\text{ bis }8\,. \tag{34}$$

Die Ergebnisse der Rechnungen für die Bedingung (33) und (34) sind in Abb. 18 in Abhängigkeit von

$$R\equiv\frac{1}{K}\equiv\frac{\omega_0}{k}$$

aufgetragen. Man entnimmt daraus für die innere Abstimmbedingung die Beziehungen der Tabelle 2. Bei gegebener Winkelgeschwindigkeit k folgt daraus die Mindestgröße der Nullfrequenz ω_0.

Tabelle 2.

$D\equiv\delta/\omega_0=$	1/2	$1/\sqrt{2}$
nach (33), $R\equiv\omega_0/k\gtrsim$	20	14
nach (34), $R\equiv\omega^0/k\gtrsim$	12	8

h) Bewegungsverlauf für v_A-Sprung. Der Einlaufvorgang für φ und ξ wird jetzt wie in Ziff. 3 für eine Reihe von Werten des Getriebeparameters ω_0/k berechnet, um ihren Zusammenhang mit der inneren Abstimmbedingung darzustellen (Tabelle 3).

Tabelle 3.

	System Nr.	I	II	III
$D \equiv \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{1}{2}$;	$R \equiv \frac{\omega_0}{k} =$	2.33	12.5	20
	Bemerkung:	krit. Pkt.	Bdg. (34)	Bdg. (33)

Die Systempunkte I, II, III sind in Abb. 17 und 18 eingezeichnet. Zur Berechnung von φ und ξ werden die Integrationskonstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ aus den Anfangsbedingungen zur Zeit $t=0$ ermittelt:

$$\xi=0,\ \varphi=0,\ \dot{\varphi}=0,$$

da $\quad v_N=v_W-\dot{\varphi}$ und $v_N=v_W=0$.

Die Ergebnisse der Berechnung sind in Abb. 19 in den dimensionslosen Kennzahlen

$$\varphi/\varphi_A,\quad \xi/\varphi_A,\quad \bar{t}\equiv kt$$

dargestellt. Wie man daraus anschaulich erkennt, ist für das System I in der Nähe des kritischen Punktes die Dämpfung so gering, daß dieser Betriebszustand für praktische Anwendungen ausscheidet[1]). Beim System II, bei dem die Abstimmungsbedingung (73) erfüllt ist, zeigt sich jedoch bereits eine genügend enge Übereinstimmung mit dem idealen Grenzfall φ_{gr}, so daß im zeitlichen Mittel schon innerhalb der Anlaufperiode die Bedingung $\xi \to 0$ erfüllt ist. Das System III schließlich nähert sich noch mehr und sehr eng an φ_{gr} an. Der Einlauf ist innerhalb der Anlaufzeit T_C

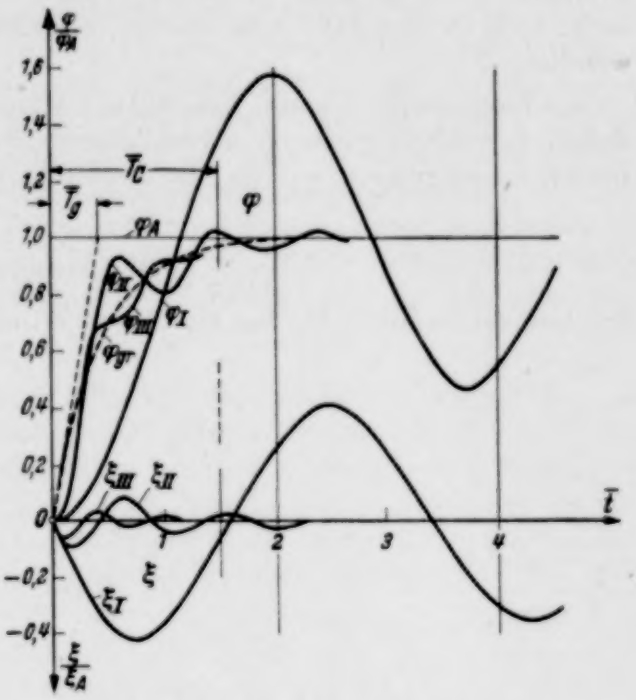


Abb. 19. Anlauf von Getriebe C bei v_A-Sprung.

$$T_C \approx 3\,T_g = 3\,\frac{g}{k} \tag{35}$$

praktisch abgeschlossen. Mit (7) und Tabelle 2 ergibt sich die folgende Beziehung zu T_A:

$$T_A \lessapprox \frac{1}{3}\,T_C; \tag{36}$$

dies ist nur ein anderer Ausdruck für die innere Abstimmbedingung. Vergleicht man Tabelle 2 und (36) mit den entsprechenden Beziehungen (16) und (18) von Getriebe B, so erkennt man, daß die Forderungen der inneren Abstimmbedingung bei Getriebe C auf ein Mehrfaches erhöht sind.

i) Allgemeiner Bewegungsverlauf, äußere Abstimmbedingung. Die Integration dieses Falls wird nach dem entsprechenden Muster von Ziff. 3 durchgeführt. Auch hier gilt die Voraussetzung, daß die innere Abstimmbedingung und also im zeitlichen Mittel $\xi \to 0$ erfüllt sei. Damit ergibt sich aus (27)

$$g\,\dot{\varphi} + k\varphi = v_A, \quad \text{oder} \quad \varphi = \varphi_A - T_g\,\dot{\varphi}\ .$$

Falls weiter vorausgesetzt wird

$$T_g\,\dot{\varphi} \ll \varphi_A, \tag{37}$$

ergibt sich durch Iteration:

$$\left.\begin{aligned} &\text{erster Schritt:} \quad \varphi \approx \varphi_A, \quad \text{differentiiert } \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_A; \\ &\text{zweiter Schritt:} \quad \varphi = \varphi_A - T_g\,\dot{\varphi}_A\ . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

[1] Kurven dieser Art sind von mir an dem in Fußnote 1 von S. 207 erwähnten Gerät experimentell aufgenommen worden.

Das Ergebnis (38) entspricht wiederum der Abb. 14: die φ-Kurve ist gegen die φ_A-Kurve um die Zeit T_g verschoben (in Abb. 14 um T_k für Getriebe B). Es gilt ebenfalls die äußere Abstimmbedingung

$$T_H \gg T_g, \tag{39}$$

die entweder unmittelbar anschaulich aus Abb. 14 abgelesen wird, oder aus (37) entsprechend wie in Ziff. 3 abgeleitet werden kann. Ebenfalls gilt die Beziehung über den Anzeigefehler $\Delta\varphi$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\varphi_H} = \frac{\Delta v}{v_H} = \frac{T_g}{T_H}. \tag{40}$$

5. Zusammenfassung. Abschließend läßt sich sagen, daß die Einhaltung der Stabilität, wenn man von Getriebe A nach C fortschreitet, immer höhere Anforderungen stellt, was durch den zunehmend verwickelteren Aufbau der Getriebe in dynamischer Hinsicht bedingt ist. Die für die Stabilität maßgebenden Größen können jedoch allgemein in Gestalt von Abstimmbedingungen aufgestellt werden. Hält man sie ein, so vermeidet man mit Sicherheit Schwierigkeiten in der Anwendung.

Umfangreichere Geräte, beispielsweise Rechengeräte, können aus einer Reihe der hier behandelten Getriebe oder noch verwickelteren Formen zusammengesetzt sein. Auch für diese Fälle führen Überlegungen, wie sie hier angestellt wurden, zum Ziel.

(Eingegangen am 7. Juni 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Carl August Traenkle*, Wrightfield HQ. AMC, MCIAXF, Dayton (Ohio), USA.

Allgemeine Grundgleichungen der Elastizitätstheorie.

Von W. Zerna.

1. Einleitung. Die Vektor- und Tensorrechnung in der von *Ricci* entwickelten Form ermöglicht eine außerordentlich einfache und übersichtliche Darstellung vieler verwickelter Probleme der Mathematik und insbesondere der theoretischen Physik. Es erscheint daher nützlich, auch bei der Behandlung von Ingenieuraufgaben dies neuzeitliche Hilfsmittel mehr und mehr heranzuziehen. Einen Beitrag dazu will die vorliegende Arbeit geben.

Da die mathematische Literatur[1] über den sogenannten *Ricci*-Kalkül häufig wenig zugänglich, oft recht undurchsichtig und teilweise uneinheitlich ist, sollen zunächst die wichtigsten Definitionen, Beziehungen und Formeln für den Gebrauch in geeigneter Weise zusammengestellt werden. Mit ihrer Hilfe werden dann die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeiner Form abgeleitet. Zwar finden sich darüber schon einige Arbeiten[2], doch verfolgen sie vorwiegend rein mathematische Ziele, setzen die vollständige Beherrschung des Kalküls voraus, wählen nicht immer den einfachsten Weg zum Verständnis und sind im ganzen der ingenieurmäßigen Betrachtungsweise wenig angepaßt. Dies mögen wohl auch die Gründe dafür sein, daß sie von Ingenieuren bisher kaum beachtet worden sind. So läßt sich beispielsweise eine Arbeit von *J. Fadle*[3] ohne Schwierigkeit verallgemeinern und in eine einfachere Darstellung bringen, wie die nachstehenden Ausführungen ergeben werden.

2. Zur Vektor- und Tensorrechnung. Es werde verabredet, daß lateinische Buchstaben als Indizes[4] die Zahlen 1, 2, 3 verkörpern. Beispielsweise wird a^i geschrieben anstatt a^1, a^2, a^3; das Symbol a^{ik} steht an Stelle der neun Größen a^{11}, a^{12}, a^{13}, a^{21}, a^{22}, a^{23}, a^{31}, a^{32}, a^{33}. Weiter soll über doppelt auftretende gleiche Indizes unter Fortlassung der Summenzeichen summiert werden, wenn nicht Ausnahmen ausdrücklich gekennzeichnet sind, oder der Index mehr als zweimal auftritt. Zur Erläuterung dieser Summationsregel mögen folgende Beispiele dienen:

$$a^r_r = \sum_{r=1}^{3} a^r_r = a^1_1 + a^2_2 + a^3_3 ,$$

$$a^r\, b_r = \sum_{r=1}^{3} a^r\, b_r = a^1\, b_1 + a^2\, b_2 + a^3\, b_3 ,$$

$$a^{ik}\, x_i\, x_k = \sum_{i,k=1}^{3} a^{ik}\, x_i\, x_k = a^{11}\, x_1\, x_1 + a^{12}\, x_1\, x_2 + a^{13}\, x_1\, x_3 + a^{21}\, x_2\, x_1 + a^{22}\, x_2\, x_2 + a^{23}\, x_2\, x_3 + a^{31}\, x_3\, x_1 + a^{32}\, x_3\, x_2 + a^{33}\, x_3\, x_3 .$$

Es versteht sich, daß der Summationsindex beliebig abgeändert werden, also beispielsweise

$$a^r\, b_r \equiv a^i\, b_i$$

geschrieben werden kann.

Eine besondere Bedeutung wird den Symbolen δ^i_k beigelegt, die *Kronecker*-Deltas genannt werden. Sie nehmen die folgenden Werte an:

$$\delta^i_k = 0, \text{ wenn } i \neq k,$$
$$= 1, \text{ wenn } i = k \text{ (nicht über } k \text{ summieren!).}$$

Beispielsweise gilt demzufolge

$$\delta^1_1 = \delta^2_2 = \delta^3_3 = 1,\ \delta^1_2 = \delta^1_3 = \delta^2_3 = \delta^2_1 = \delta^3_1 = \delta^3_2 = 0 .$$

---

[1] Vgl. z. B. *J. A. Schouten*, Der Ricci-Kalkül. Berlin 1924; *T. Levi-Civita*, Absoluter Differentialkalkül, Berlin 1928; *A. Duschek* und *W. Mayer*, Lehrbuch der Differentialgeometrie, Leipzig und Berlin 1930; *A. J. McConnel*, Applications of the Absolute Differential Calculus, London und Glasgow 1947.

[2] Vgl. z. B. *F. D. Murnaghan*, Am. J. Math. 59 (1937), S. 235; *E. A. Deuker*, Deutsche Mathematik 5 (1940), S. 94 und S. 546; *H. Neuber*, Z. angew. Math. Mech. 23 (1943), S. 321.

[3] *J. Fadle*, Ing.-Arch. 17 (1949), S. 62.

[4] Obenstehende Indizes sind dabei nicht mit Potenzexponenten zu verwechseln.

Es mögen mit ϑ_i drei unabhängige Veränderliche und mit $d\vartheta^i$ ihre Differentiale bezeichnet werden. Partielle Differentiationen nach den Variablen seien zur weiteren Vereinfachung der Schreibweise durch ein Komma angezeigt; es bedeutet so zum Beispiel

$$a_{,i} = \frac{\partial a}{\partial \vartheta_i}, \quad a_{rl,k} = \frac{\partial a_{rl}}{\partial \vartheta_k}, \quad a^{ik}{}_{,l} = \frac{\partial a^{ik}}{\partial \vartheta_l}.$$

Durch $\overline{\vartheta}_i$ seien neue Variable gekennzeichnet, die aus den ϑ_i mittels einer beliebigen Transformation

$$\overline{\vartheta}_i = \overline{\vartheta}_i(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \tag{2.1}$$

hervorgehen. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionen (2.1) hinreichend oft differenzierbar und voneinander unabhängig sind. Wird (2.1) nach ϑ_i aufgelöst, so ergeben sich Funktionen der Form

$$\vartheta_i = \vartheta_i(\overline{\vartheta}_1, \overline{\vartheta}_2, \overline{\vartheta}_3). \tag{2.2}$$

Aus (2.1) und (2.2) können jetzt sofort die Transformationsgesetze für die Differentiale $d\vartheta^i$ und $d\overline{\vartheta}^i$ gefunden werden. Es ist

$$d\vartheta^i = c^i_r \, d\overline{\vartheta}^r, \quad d\overline{\vartheta}^i = \overline{c}^i_r \, d\vartheta^r, \tag{2.3}$$

worin

$$c^i_r = \frac{\partial \vartheta_i}{\partial \overline{\vartheta}_r}, \qquad \overline{c}^i_r = \frac{\partial \overline{\vartheta}_i}{\partial \vartheta_r}. \tag{2.4}$$

Zwischen den c^i_r und $\overline{c}^i_r$ bestehen ferner die Beziehungen

$$\overline{c}^r_l \, c^l_i = c^r_l \, \overline{c}^l_i = \delta^r_i. \tag{2.5}$$

Die Ausdrücke (2.3) zeigen, daß sich die Differentiale der unabhängigen Veränderlichen linear transformieren.

Wenn eine Transformation der ϑ_i gemäß (2.1) vorgenommen wird, so können sich von ϑ_i abhängige Größen in verschiedener Weise transformieren. Es interessieren nun insbesondere solche Größen, die bei der Transformation unverändert bleiben oder deren Transformationsmatrix aus den Ausdrücken (2.4) gebildet wird. Demgemäß werden folgende Unterscheidungen getroffen:

a) Eine Größe a heißt Invariante, wenn nach der Transformation

$$\overline{a} = a \tag{2.6}$$

ist. Invarianten, die durch die Angabe einer reellen Zahl bestimmt sind, heißen skalare Invarianten oder Skalare oder Tensoren nullter Ordnung.

b) Die Gesamtheit der drei Größen a^r heißt kontravarianter Vektor oder kontravarianter Tensor erster Ordnung, wenn nach der Transformation

$$\overline{a}^r = \overline{c}^r_s \, a^s. \tag{2.7}$$

c) Die Gesamtheit der drei Größen a_r heißt kovarianter Vektor oder kovarianter Tensor erster Ordnung, wenn nach der Transformation

$$\overline{a}_r = c^s_r \, a_s. \tag{2.8}$$

d) Die Gesamtheit der neun Größen a^{rs} heißt kontravarianter Tensor zweiter Ordnung, wenn nach der Transformation

$$\overline{a}^{rs} = \overline{c}^r_m \, \overline{c}^s_n \, a^{mn}. \tag{2.9}$$

e) Die Gesamtheit der neun Größen a_{rs} heißt kovarianter Tensor zweiter Ordnung, wenn nach der Transformation

$$\overline{a}_{rs} = c^m_r \, c^n_s \, a_{mn}. \tag{2.10}$$

f) Die Gesamtheit der neun Größen $a^r_{\cdot s}$ oder $a^{\cdot r}_s$ heißt gemischter Tensor[1] zweiter Ordnung, wenn nach der Transformation

$$\left.\begin{aligned} \overline{a}^r_{\cdot s} &= \overline{c}^r_m \, c^n_s \, a^m_{\cdot n}, \\ \text{bzw. } \overline{a}^{\cdot r}_s &= c^n_s \, \overline{c}^r_m \, a^{\cdot m}_n. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

In entsprechender Weise lassen sich Tensoren höherer Ordnung definieren. Die einzelnen Größen, die den Vektor bzw. Tensor bilden, wie z. B. a^1, a^2, a^3 bzw. a^{11}, a^{12}... heißen Komponenten des Vektors bzw. Tensors.

[1] Die den oberen bzw. unteren Indizes gegenübergestellten Punkte sollen die Reihenfolge der Indizes festlegen, was sich als notwendig erweisen wird.

Sind die Komponenten eines Tensors a^{ik} bzw. a_{ik} durch die Beziehung

$$a^{ik} = a^{ki} \text{ bzw. } a_{ik} = a_{ki} \tag{2.12a}$$

verknüpft, so heißt der Tensor symmetrisch. Andererseits heißt er antimetrisch, wenn

$$a^{ik} = -a^{ki} \text{ bzw. } a_{ik} = -a_{ki} . \tag{2.12b}$$

Aus den Definitionen (2.7) bis (2.11) ist ersichtlich, daß es zwei Typen von Vektoren gibt, nämlich kontravariante und kovariante und drei Typen von Tensoren, nämlich kontravariante, kovariante und gemischte. Diese Typen sind durch die Stellung der Indizes unterschieden. Kontravariante Größen tragen obere Indizes, kovariante Größen untere Indizes und gemischte Größen sowohl obere als untere Indizes.

Es ist nun klar, daß die Differentiale $d\vartheta^i$ gemäß (2.3) kontravariant sind und daher mit Recht den oberen Index tragen, während die ϑ_i im allgemeinen wegen (2.1) weder kovariant noch kontravariant sind, so daß in diesem Fall der Index als Ausnahme anzusehen ist.

Aus den Definitionen (2.6) bis (2.11) folgt in Verbindung mit (2.5), daß alle Größen der Form $a^r_{,r}$, $a^r b_r$, $a^{ik} b_{ik}$ Invarianten sind.

Die Addition von Tensoren läßt sich nur bei gleichen Typen und gleicher Ordnung durchführen. Beispielsweise, wenn a^r und b^r zwei kontravariante Vektoren sind, so heißt der Vektor c^r, der durch die Gleichung

$$c^r = a^r + b^r$$

definiert ist, die Summe von a^r und b^r. Entsprechendes gilt für Tensoren jeden Typs und jeder Ordnung. Die Subtraktion ist selbstverständlich als Sonderfall der Addition eingeschlossen. Die Addition von Tensoren liefert also wieder Tensoren.

Die Multiplikation von Tensoren führt zu Tensoren höherer Ordnung. Beispielsweise ergibt das Produkt zweier Vektoren a^r und b^s gemäß

$$c^{rs} = a^r b^s$$

einen Tensor zweiter Ordnung.

Nachdem nunmehr die grundsätzlichen Begriffe der Vektor- und Tensorrechnung in der Schreibweise *Riccis* eingeführt sind, werde der dreidimensionale Euklidische Raum betrachtet, dessen Punkte durch allgemeine Koordinaten ϑ_i bestimmt seien, so daß der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines Punktes als Funktion

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \tag{2.13}$$

erscheint. Die ϑ_i lassen sich in bekannter Weise als Koordinatenkurven deuten und heißen auch krummlinige Koordinaten, die natürlich im allgemeinen nicht orthogonal sind.

Die Ableitungen des Ortsvektors nach den Koordinaten definieren die Größen

$$\mathfrak{e}_i = \mathfrak{r}_{,i} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta_i} . \tag{2.14}$$

Bei einer Koordinatentransformation entsprechend (2.1) gilt

$$\bar{\mathfrak{e}}_i = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \vartheta_r} \frac{\partial \vartheta_r}{\partial \bar{\vartheta}_i} = c^r_i \mathfrak{e}_r , \tag{2.15}$$

woraus ersichtlich ist, daß die $\mathfrak{e}_i$ kovariante Größen sind, sie heißen kovariante Grund- oder Basisvektoren und bilden die kovariante Basis. Sie lassen sich als Tangentenvektoren an die Koordinatenkurven deuten, sind natürlich im allgemeinen keine Einheitsvektoren.

Für die Basisvektoren $\mathfrak{e}_i$ in einem Punkt des Raumes und alle daraus noch aufzubauenden Vektorausdrücke gelten alle Regeln der elementaren Vektorrechnung, wie z. B. die Bildung von Skalarprodukten, Vektorprodukten usw.

Neben der kovarianten Basis $\mathfrak{e}_i$ wird die kontravariante Basis $\mathfrak{e}^i$ eingeführt, deren Basisvektoren durch die Skalarprodukte

$$\mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}^k = \delta^k_i \tag{2.16}$$

definiert sind, was besagt, daß je ein Vektor der einen Basis auf je zweien der anderen Basis senkrecht steht.

Weiterhin lassen sich aus den Basisvektoren noch folgende häufig gebrauchten Skalarprodukte bilden:

$$g_{ik} = \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{e}_k , \quad g^{ik} = \mathfrak{e}^i \cdot \mathfrak{e}^k . \tag{2.17}$$

Die g_{ik} bzw. g^{ik} bilden die kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten eines symmetrischen Tensors, der metrischer Fundamentaltensor oder Maßtensor heißt und die sogenannte Metrik des

Raumes bestimmt. Es gilt noch die folgende Beziehung:

$$g^{ik}\, g_{il} = \delta^k_l\,, \tag{2.18}$$

woraus

$$g^{ik} = \frac{G_{ik}}{g} \tag{2.19}$$

folgt. Darin ist $g = |g_{ik}|$ die aus den g_{ik} gebildete Determinante, und G_{ik} die Unterdeterminante zu g_{ik}. Der Wert $\sqrt{g}$ ist gleich dem Volumen des aus den Grundvektoren $\mathfrak{e}_i$ gebildeten Parallelepipeds.

Für den Übergang von der einen zur anderen Basis sind noch folgende Formeln nützlich:

$$\mathfrak{e}^i = g^{il}\, \mathfrak{e}_l\,, \quad \mathfrak{e}_i = g_{il}\, \mathfrak{e}^l\,. \tag{2.20}$$

Jedem Punkt des Raumes lassen sich Vektoren bzw. Tensoren zuordnen, die dann Feldvektoren bzw. Feldtensoren heißen. Durch einen Ausdruck der Form

$$\mathfrak{v} = v^i\, \mathfrak{e}_i = v_i\, \mathfrak{e}^i \tag{2.21}$$

läßt sich ein Feldvektor darstellen. Die v^i können demgemäß als Komponenten in Richtung der kovarianten Basis, die v_i als Komponenten in Richtung der kontravarianten Basis gedeutet werden. Abb. 1 veranschaulicht den Tatbestand, wobei der Einfachheit und Klarheit halber die Zerlegung in der Ebene betrachtet wird. Der Vektor $\mathfrak{v}$ ist gemäß (2.21) eine Invariante, die bei vorgegebener Basis durch die drei Funktionen v^i bzw. v_i bestimmt ist. Es hat so gesehen eigentlich nur Sinn, von den kontravarianten oder kovarianten Komponenten eines Vektors zu sprechen[1]. Es hat sich aber eingebürgert, die Gesamtheit der v^i bzw. v_i selbst als kontravariante bzw. kovariante Vektoren zu bezeichnen, was bei den Definitionen (2.7) und (2.8) benutzt worden ist.

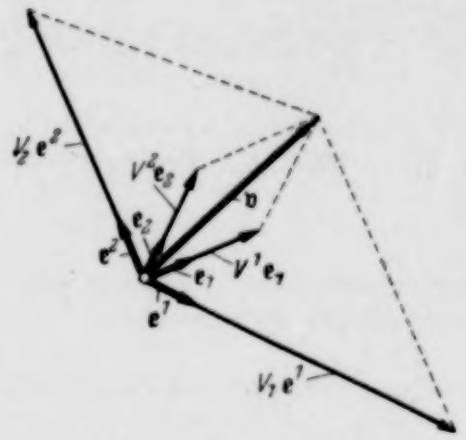


Abb. 1. Zerlegung eines Vektors in kovariante und kontravariante Komponenten.

Die verschiedenen Komponenten eines Vektors bzw. Tensors werden durch nachstehende Beziehungen verknüpft, die formal das Heben oder Senken der Indizes ermöglichen:

$$a^i = g^{il}\, a_l\,, \qquad a_i = g_{il}\, a^l\,, \tag{2.22}$$

$$\left.\begin{aligned} a^i_{\cdot k} &= g^{ir}\, a_{rk} = g_{kr}\, a^{ir}\,, \\ a^{\cdot i}_{k} &= g^{ir}\, a_{kr} = g_{kr}\, a^{ri}\,, \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

$$\left.\begin{aligned} a^{ik} &= g^{ir}\, a^{\cdot k}_{r} = g^{kr}\, a^{i}_{\cdot r}\,, \\ a_{ik} &= g_{kr}\, a^{\cdot r}_{i} = g_{ir}\, a^{r}_{\cdot k}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.24}$$

Aus (2.23), (2.24) wird deutlich, daß die Reihenfolge der Indizes zu beachten ist, denn im allgemeinen ist

$$a^{\cdot k}_{i} \neq a^{k}_{\cdot i}\,,$$

nur bei symmetrischen Tensoren gilt

$$a^{\cdot k}_{i} = a^{k}_{\cdot i} = a^k_i\,.$$

Der infinitesimale Unterschied $d\mathfrak{r}$ der Ortsvektoren zweier benachbarter Punkte mit den Koordinaten ϑ_i und $\vartheta_i + d\vartheta^i$ bestimmt sich mit (2.14) aus (2.13) zu

$$d\mathfrak{r} = d\vartheta^i\, \mathfrak{e}_i \tag{2.25}$$

und ist ein Feldvektor, dessen kontravariante Komponenten die Koordinatendifferentiale $d\vartheta^i$ sind. Das Linienelement ds des Raumes ist durch den absoluten Betrag $|d\mathfrak{r}|$ definiert und ermittelt sich aus dem quadratischen Ausdruck

$$ds^2 = d\mathfrak{r} \cdot d\mathfrak{r} = g_{ik}\, d\vartheta^i\, d\vartheta^k\,. \tag{2.26}$$

Wird ein Skalar a nach der Koordinate ϑ_i differentiert, so ergibt sich mit

$$a_{,\,i} = \frac{\partial a}{\partial \vartheta_i}$$

ein kovarianter Vektor, denn bei einer Koordinatentransformation gemäß (2.1) kann geschrieben werden

$$\bar{a}_{,\,i} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial \bar{\vartheta}_i} = \frac{\partial a}{\partial \bar{\vartheta}_i} = \frac{\partial a}{\partial \vartheta_r}\,\frac{\partial \vartheta_r}{\partial \bar{\vartheta}_i} = c^r_i\, a_{,l}\,,$$

was gemäß (2.8) in der Tat einen kovarianten Vektor kennzeichnet.

[1] Siehe auch *G. Hessenberg*, Math. Ann. 78 (1917), S. 187.

Die differenzierten Basisvektoren lassen sich durch die Basisvektoren selbst ausdrücken. Wird nämlich

$$\mathfrak{e}_{i,k} = \Gamma^l_{ik}\, \mathfrak{e}_l\,, \qquad \mathfrak{e}^i{}_{,k} = -\Gamma^i_{lk}\, \mathfrak{e}^l \tag{2.27}$$

gesetzt und dies mit $\mathfrak{e}^l$ multipliziert, so folgt bei Beachtung von (2.16) sofort

$$\Gamma^l_{ik} = \mathfrak{e}_{i,k} \cdot \mathfrak{e}^l = \mathfrak{e}_{k,i} \cdot \mathfrak{e}^l = -\,\mathfrak{e}^l{}_{,i} \cdot \mathfrak{e}_k\,. \tag{2.28}$$

Die Γ^l_{ik}, die im allgemeinen keine Tensoren dritter Ordnung sind, heißen *Christoffel*sche Dreiindizessymbole zweiter Art, sie können auch wie folgt geschrieben werden:

$$\Gamma^l_{ik} = g^{lr}\, \Gamma_{r,ik}\,, \tag{2.29}$$

wenn

$$\Gamma_{r,ik} = \mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{e}_{i,k} = \mathfrak{e}_r \cdot \mathfrak{e}_{k,i} \tag{2.30}$$

bedeutet. Die $\Gamma_{r,ik}$ sind die *Christoffel*schen Dreiindizessymbole erster Art, die sich aus dem Maßtensor berechnen lassen:

$$\Gamma_{r,ik} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ri,k} + g_{rk,i} - g_{ik,r})\,. \tag{2.31}$$

Der Nachweis, daß (2.30) mit (2.31) tatsächlich übereinstimmt, ist leicht gebracht, es ist dazu nur (2.17) in (2.31) einzusetzen und die Differentiation auszuführen.

Weiterhin gelten noch die augenscheinlichen Beziehungen

$$\Gamma^i_{rs} = \Gamma^i_{sr}, \quad \Gamma_{i,rs} = \Gamma_{i,sr}\,.$$

Schließlich sei noch folgende wichtige Formel angeführt:

$$\Gamma^i_{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \vartheta_k}\,. \tag{2.32}$$

Mit (2.21) läßt sich für die Ableitung eines Feldvektors

$$\mathfrak{v}_{,i} = v^l{}_{,i}\, \mathfrak{e}_l + v^l\, \mathfrak{e}_{l,i} = v_{l,i}\, \mathfrak{e}^l + v_l\, \mathfrak{e}^l{}_{,i}$$

schreiben, was mit (2.27) in die Form

$$\mathfrak{v}_{,i} = v^l\big|_i\, \mathfrak{e}_l = v_{l|i}\, \mathfrak{e}^l \tag{2.33}$$

gebracht werden kann. Die $v^l\big|_i$ bzw. $v_{l|i}$ werden als kovariante oder absolute Differentialquotienten des Vektors v^l bzw. v_l bezeichnet, was der Strich vor dem zweiten Index anzeigt. Die kovarianten Differentialquotienten eines Vektors stellen Tensoren zweiter Ordnung dar und errechnen sich aus folgenden Formeln:

$$v_{l|i} = v_{l,i} - \Gamma^r_{li}\, v_r\,, \quad v^l\big|_i = v^l{}_{,i} + \Gamma^l_{ri}\, v^r\,. \tag{2.34}$$

Für die zweite kovariante Ableitung gilt

$$v_{r\,|\,st} - v_{r\,|\,ts} = R^p_{\cdot rst}\, v_p\,,$$

worin

$$R^p_{\cdot rst} = \Gamma^p_{rt,s} - \Gamma^p_{rs,i} + \Gamma^m_{ri}\,\Gamma^p_{ms} - \Gamma^m_{rs}\,\Gamma^p_{mt} \tag{2.35}$$

der *Riemann-Christoffel*sche Krümmungstensor ist, der im hier vorausgesetzten euklidischen Raum verschwindet, so daß

$$v_{r\,|\,st} = v_{r\,|\,ts}$$

ist. Ferner läßt sich zeigen, daß die kovariante Differentiation auch den Regeln der gewöhnlichen Differentiation bezüglich der Ableitung einer Summe und eines Produkts gehorcht.

Die kovariante Differentiation von Tensoren zweiter Ordnung ergibt Tensoren dritter Ordnung. Es gelten die Formeln

$$\left.\begin{aligned} a_{ik\,|\,l} &= a_{ik,l} - \Gamma^r_{il}\, a_{rk} - \Gamma^r_{kl}\, a_{ir}\,, \\ a^{ik}\big|_l &= a^{ik}{}_{,l} + \Gamma^i_{lr}\, a^{rk} + \Gamma^k_{lr}\, a^{ir}\,, \\ a^i_{\cdot k\,|\,l} &= a^i_{\cdot k,l} + \Gamma^i_{lr}\, a^r_{\cdot k} - \Gamma^r_{kl}\, a^i_{\cdot r}\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.36}$$

Die kovariante Differentiation des Maßtensors ergibt insbesondere die Beziehungen

$$g_{i\,|\,kl} = 0\,, \quad g^{ik}\big|_l = 0\,, \tag{2.37}$$

die als *Riccis* Lemma bezeichnet werden.

Da alle durch kovariante Differentiation gewonnenen Größen Tensoren sind, können entsprechend (2.22) bis (2.24) alle Indizes gehoben oder gesenkt werden, so daß beispielsweise geschrieben werden kann

$$v^i\big|_k = g^{ir}\, v_{r\,|\,k}\,, \quad a_{ik}\big|^i = g^{ir}\, a_{ik\,|\,r} \qquad \text{usw.} \tag{2.38}$$

3. Spannungszustand und Gleichgewichtsbedingungen. Es werde ein Körper, der eine kontinuierliche Massenverteilung darstellt, betrachtet, dessen Punkte infolge irgendwelcher Einwirkungen Verschiebungen erleiden, so daß der Körper verformt wird. Über die Art der Verformung werden zunächst keinerlei Voraussetzungen gemacht, sie können beliebige, endliche Größe haben.

Die Punkte des unverformten Körpers seien in Abhängigkeit von allgemeinen krummlinigen Koordinaten ϑ_i durch ihren Ortsvektor

$$\overset{(0)}{\mathfrak{r}} = \overset{(0)}{\mathfrak{r}}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \tag{3.1}$$

bestimmt. Der bei der Verformung zurückgelegte Weg eines Punktes sei durch den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ gekennzeichnet. Der Ortsvektor $\mathfrak{r}$ eines Punktes des verformten Körpers kann dann durch den Ausdruck

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \overset{(0)}{\mathfrak{r}} + \mathfrak{v} \tag{3.2}$$

angegeben werden. Die Beziehungen (3.1) und (3.2) vermitteln entsprechend (2.13) Darstellungen von Räumen, die durch die gleichen Koordinaten ϑ_i beschrieben werden, deren Metrik aber verschieden ist. Die Zahlenwerte ϑ_i lassen sich gewissermaßen mit den Körperpunkten fest verbunden denken, so daß ein Körperpunkt stets dieselben ϑ_i besitzt, ganz gleich welche Verschiebungen er auch erleidet. Die ϑ_i werden deshalb auch häufig körperfeste Koordinaten genannt.

Es werde nun ein beliebiger Punkt des verformten Körpers, also des durch (3.2) dargestellten Raumes, betrachtet, in ihm die kovariante Basis errichtet und in Richtung der Basisvektoren die Längen

$$ds_i = |\mathfrak{e}_i|\, d\vartheta^i = \sqrt{g_{ii}}\, d\vartheta^i \quad \text{(nicht über } i \text{ summieren!)}$$

abgetragen. Die so aufgespannte Ecke werde zu einem Tetraeder ergänzt (Abb. 2).

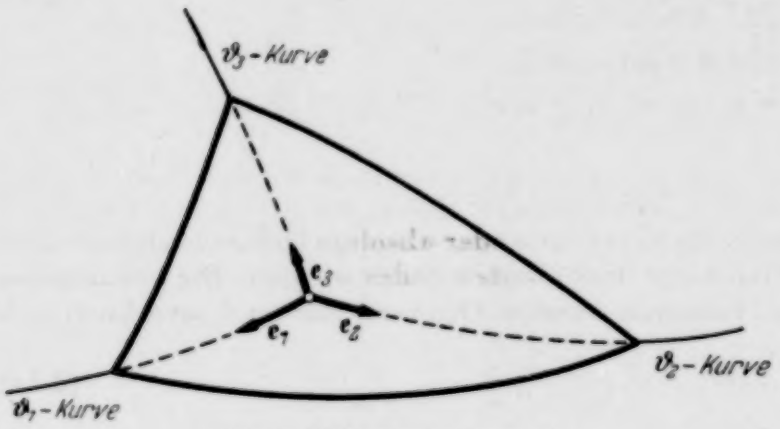


Abb. 2. Infinitesimales Tetraeder.

Die in den einzelnen Tetraederflächen übertragenen Spannungen seien durch ihre Spannungsvektoren $\mathfrak{p}_i$ bestimmt, die als Kräfte je Flächeneinheit der verformten Flächen definiert werden mögen. Sie lassen sich mittels der Komponentendarstellung

$$\mathfrak{p}_i = p_i^{(i)}\, \mathfrak{e}^l = p^{(i)l}\, \mathfrak{e}_l \tag{3.3}$$

ausdrücken, wobei die eingeklammerten Indizes darauf hinweisen sollen, daß es sich nicht etwa um Tensoren handelt. Einführung der Größen

$$s^{il} = p^{(i)l}\sqrt{g^{ii}}\,, \quad s_l^i = p_l^{(i)}\sqrt{g^{ii}}$$

führt (3.3) über in

$$\mathfrak{p}_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, s^{il}\, \mathfrak{e}_l = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}}\, s_l^i\, \mathfrak{e}^l\,. \tag{3.4}$$

Durch Gleichgewichtsbetrachtungen am Tetraeder läßt sich leicht zeigen, daß s^{ik} bzw. s_k^i kontravariante bzw. gemischte Komponenten eines symmetrischen Tensors sind, der Spannungstensor heißt. Gemäß (3.4) schließen sich die kontravarianten bzw. gemischten Komponenten des Spannungstensors an die Zerlegung der Spannungsvektoren in die Richtungen der kovarianten bzw. kontravarianten Basis an, während sich für die kovarianten Komponenten des Spannungstensors keine solch anschauliche Deutung finden läßt, weshalb sie hier auch übergangen werden sollen.

Das Tetraeder gemäß Abb. 2 werde jetzt zu einem infinitesimalen Volumenelement ergänzt, wie es Abb. 3 zeigt, dessen Gleichgewichtszustand untersucht werden soll.

Der Flächeninhalt der Seiten des Volumenelementes, die von den Vektoren $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ bzw. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_3$ bzw. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ aufgespannt werden, seien df_1 bzw. df_2 bzw. df_3. Wird mit dV der Volumeninhalt bezeichnet, so gilt

$$dV = \sqrt{g}\, d\vartheta^1\, d\vartheta^2\, d\vartheta^3 = df_1\, dh_1 = df_2\, dh_2 = df_3\, dh_3\,, \tag{3.5}$$

wenn dh_1, dh_2, dh_3 die Abstände der gegenüberliegenden Seiten des Volumenelementes angeben

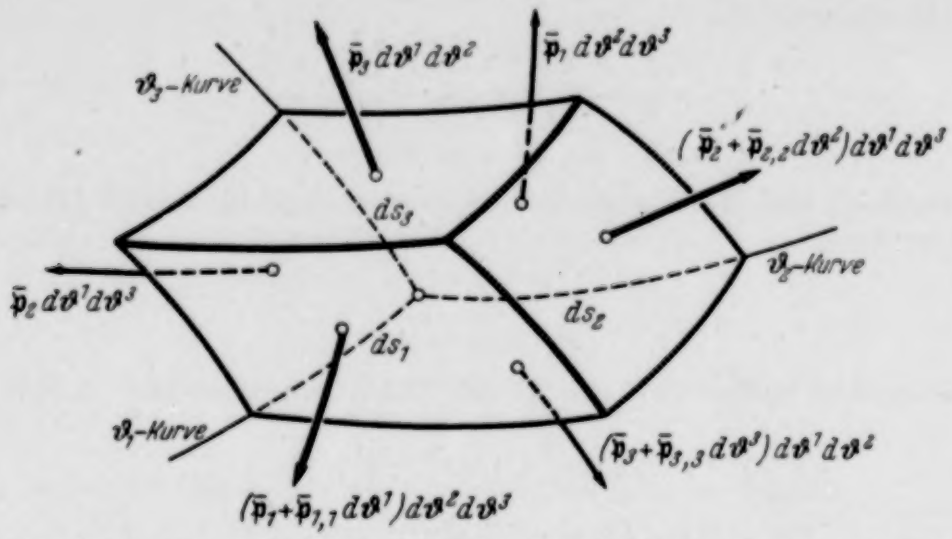


Abb. 3. Volumenelement mit angreifenden Kräften. (Die Massenkraft $\mathfrak{q}$ ist nicht eingetragen.)

Da der kontravariante Grundvektor $\mathfrak{e}^1$ definitionsgemäß senkrecht auf den kovarianten Basisvektoren $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_3$ steht, verläuft er gerade in Richtung des Abstandes dh_1, der somit gleich der Projektion von $d\vartheta^1\, \mathfrak{e}_1$ auf $\mathfrak{e}^1$ ist und demzufolge als Skalarprodukt

$$dh_1 = \frac{\mathfrak{e}_1 \cdot \mathfrak{e}^1}{\sqrt{g^{11}}}\, d\vartheta^1$$

geschrieben werden kann. Mit (2.16) wird daraus

$$dh_1 = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}}\, d\vartheta^1 ,$$

und in entsprechender Weise

$$dh_2 = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}}\, d\vartheta^2 ,$$

$$dh_3 = \frac{1}{\sqrt{g^{33}}}\, d\vartheta^3 .$$

Mit (3.5) bestimmt sich der Flächeninhalt der Seiten des Volumenelementes nun sofort zu

$$df_1 = \sqrt{g}\, \sqrt{g^{11}}\, d\vartheta^2\, d\vartheta^3 ,$$
$$df_2 = \sqrt{g}\, \sqrt{g^{22}}\, d\vartheta^1\, d\vartheta^3 ,$$
$$df_3 = \sqrt{g}\, \sqrt{g^{33}}\, d\vartheta^1\, d\vartheta^2 .$$

Damit ergeben sich bei Berücksichtigung von (3.4) die an den Seiten wirkenden Kräfte wie folgt:

$$\mathfrak{p}_1\, df_1 = \bar{\mathfrak{p}}_1\, d\vartheta^2\, d\vartheta^3 ,\quad \mathfrak{p}_2\, df_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2\, d\vartheta^1\, d\vartheta^3 ,\quad \mathfrak{p}_3\, df_3 = \bar{\mathfrak{p}}_3\, d\vartheta^1\, d\vartheta^2 , \tag{3.6}$$

wenn

$$\bar{\mathfrak{p}}_i = \sqrt{g}\, s^{il}\, \mathfrak{e}_l = \sqrt{g}\, s^i_l\, \mathfrak{e}^l \tag{3.7}$$

gesetzt wird.

Wird mit $\mathfrak{q}$ der auf die Volumeneinheit des verformten Körpers bezogene Vektor der Massenkraft bezeichnet, so bestimmt sich die am Volumenelement angreifende Massenkraft zu

$$\bar{\mathfrak{q}}\, d\vartheta^1\, d\vartheta^2\, d\vartheta^3 \tag{3.8}$$

mit

$$\bar{\mathfrak{q}} = \sqrt{g}\, \mathfrak{q} .$$

Mit (3.6) und (3.8) sind alle am Volumenelement angreifenden Kräfte erfaßt. Sie sind in Abb. 3 durch ihre Vektoren dargestellt, wobei die durch die Koordinatenänderungen bedingten Änderungen der Kräfte berücksichtigt sind.

Das Gleichgewicht am Volumenelement verlangt, daß die vektorielle Summe aller Kräfte verschwindet. Dies führt auf die aus Abb. 3 unmittelbar abzulesende Vektorgleichung

$$\bar{\mathfrak{p}}_{i,i} + \bar{\mathfrak{q}} = 0 . \tag{3.9}$$

Wird (3.9) skalar mit $\mathfrak{e}^k$ bzw. $\mathfrak{e}_k$ multipliziert, (3.7), eingeführt, (2.16) und (2.27) beachtet, so lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen durch die kontravarianten bzw. gemischten Komponenten des Spannungstensors ausdrücken. Es ergibt sich

$$\bar{s}^{li}{}_{,i} + \Gamma^i_{ri}\, \bar{s}^{rl} + \bar{\mathfrak{q}}^i = 0 , \tag{3.10}$$

bzw.

$$\bar{s}^l_{i,l} - \Gamma^r_{il}\, \bar{s}^l_r + \bar{q}_i = 0 . \tag{3.11}$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$\bar{s}^{ik} = \sqrt{g}\, s^{ik},\ \bar{s}^{i}_{k} = \sqrt{g}\, s^{i}_{k},$$
$$\bar{q}^{i} = \sqrt{g}\, q^{i},\ \bar{q}_{i} = \sqrt{g}\, q_{i},$$
$$q^{i} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}^{i},\ q_{i} = \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{e}_{i}.$$

Mit Hilfe von (2.32) und (2.35) können die Gleichungen (3.10) und (3.11) auch in folgende Form gebracht werden:

$$s^{ki}|_{i} + q^{i} = 0, \tag{3.12}$$

bzw.

$$s^{l}_{i}|_{l} + q_{i} = 0. \tag{3.13}$$

Werden die kovarianten Differentiationen gemäß (2.35) ausgeschrieben, so lautet (3.12) bzw. (3.13)

$$s^{ki}{}_{,i} + \Gamma^{l}_{rl}\, s^{ri} + \Gamma^{i}_{lr}\, s^{lr} + q^{i} = 0, \tag{3.14}$$

bzw.

$$s^{l}_{i,l} + \Gamma^{r}_{lr}\, s^{l}_{i} - \Gamma^{r}_{il}\, s^{l}_{r} + q_{i} = 0. \tag{3.15}$$

Natürlich können mittels (2.23) die Gleichgewichtsbedingungen auch durch die kovarianten Komponenten des Spannungstensors ausgedrückt werden, was jedoch, wie schon früher angedeutet wurde, von geringerem Interesse ist, weshalb es hier auch unterbleiben soll.

Die Gleichungen (3.9) bis (3.15) stellen verschiedene Schreibweisen der allgemeinsten Gleichgewichtsbedingungen des verformten Körpers dar, die natürlich alle den gleichen Inhalt haben. Wegen ihrer gedrängten Form verdienen im allgemeinen die Gleichungen (3.12) bzw. (3.13) den Vorzug, sofern eine Darstellung in Komponenten gewünscht wird. Im übrigen läßt sich in gewissen Fällen auch (3.9) zweckmäßig verwenden.

Da die Gleichgewichtsbedingungen für den verformten Körper gemäß (3.2) aufgestellt worden sind, sind selbstverständlich die in ihnen auftretenden *Christoffel*symbole für den verformten Körper zu bilden, der allerdings bei Voraussetzung kleiner Verschiebungen, entsprechend der klassischen Elastizitätstheorie, mit dem unverformten Körper identifiziert werden kann.

4. Formänderungszustand und Elastizitätsgesetz. Der durch das Linienelement $\overset{(0)}{ds}$ bestimmte Abstand zweier benachbarter Punkte des unverformten Körpers errechnet sich gemäß (2.26) zu

$$\overset{(0)}{ds}{}^{2} = \overset{(0)}{g}_{ik}\, d\vartheta^{i}\, d\vartheta^{k}, \tag{4.1}$$

wenn $\overset{(0)}{g}_{ik}$ den Maßtensor des unverformten Körpers bezeichnet. Für den Abstand dieser beiden Punkte nach der Verformung gilt

$$ds^{2} = g_{ik}\, d\vartheta^{i}\, d\vartheta^{k}. \tag{4.2}$$

Der Unterschied zwischen diesen beiden Ausdrücken ist ein Maß für die Verformung des Körpers und beträgt

$$ds^{2} - \overset{(0)}{ds}{}^{2} = 2\,\gamma_{ik}\, d\vartheta^{i}\, d\vartheta^{k}, \tag{4.3}$$

worin

$$\gamma_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ik} - \overset{(0)}{g}_{ik}) \tag{4.4}$$

einen kovarianten symmetrischen Tensor angibt, der Verzerrungstensor heißt[1].

Der Verzerrungstensor läßt sich sowohl auf den unverformten als auch auf den verformten Körper beziehen, je nachdem mit welcher Metrik er verbunden wird. Es sollen nachstehend beide Fälle behandelt werden.

Aus (3.2) folgt für den Maßtensor des verformten Körpers

$$g_{ik} = \mathfrak{r}_{,i} \cdot \mathfrak{r}_{,k} = \overset{(0)}{g}_{ik} + \overset{(0)}{\mathfrak{e}}_{i} \cdot \mathfrak{v}_{,k} + \overset{(0)}{\mathfrak{e}}_{k} \cdot \mathfrak{v}_{,i} + \mathfrak{v}_{,i} \cdot \mathfrak{v}_{,k}, \tag{4.5}$$

wenn $\overset{(0)}{\mathfrak{e}}_{i}$ die kovariante Basis des unverformten Körpers angibt. Der Verschiebungsvektor werde nun durch seine kovarianten Komponenten, bezogen auf die Basis des unverformten Körpers ausgedrückt:

$$\mathfrak{v} = \overset{(0)}{v}_{l}\, \overset{(0)}{\mathfrak{e}}{}^{l}.$$

[1] Der Verzerrungstensor läßt sich auch in anderer Weise definieren, vgl. z. B. *H. Richter*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 65.

Daraus folgt dann

$$\mathfrak{v}_{,i} = \overset{(0)}{v}_{l|i}\,\overset{(0)}{\mathfrak{e}}{}^{l}\,; \tag{4.6}$$

darin berechnet sich die kovariante Ableitung gemäß (2.34) zu

$$\overset{(0)}{v}_{l|i} = \overset{(0)}{v}_{l,i} - \Gamma^{r}_{li}\,\overset{(0)}{v}_{r}\,. \tag{4.7}$$

In (4.7) bedeuten $\overset{(0)}{\Gamma}{}^{l}_{ki}$ die auf den unverformten Körper bezogenen *Christoffel*symbole. Mit (4.5), (4.6) und bei Beachtung von (2.16), (2.22), (2.37) ergibt sich der Verzerrungstensor (4.4) in der auf den unverformten Körper bezogenen Gestalt:

$$\gamma_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(\overset{(0)}{v}_{i|k} + \overset{(0)}{v}_{k|i} + \overset{(0)}{v}{}^{r}\,|_{i}\,\overset{(0)}{v}{}^{r|k})\,. \tag{4.8}$$

Um die Darstellung des auf den verformten Körper bezogenen Verzerrungstensor zu erhalten, wird (3.2) in der Form

$$\overset{(0)}{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} - \mathfrak{v}$$

geschrieben und daraus der Maßtensor des unverformten Körpers gebildet:

$$\overset{(0)}{g}_{ik} = \overset{(0)}{\mathfrak{r}}_{,i} \cdot \overset{(0)}{\mathfrak{r}}_{,k} = g_{ik} - \mathfrak{e}_i \cdot \mathfrak{v}_{,k} - \mathfrak{e}_k \cdot \mathfrak{v}_{,i} + \mathfrak{v}_{,i} \cdot \mathfrak{v}_{,k}\,. \tag{4.9}$$

Der Verschiebungsvektor wird jetzt in Komponenten bezüglich des verformten Körpers ausgedrückt, was mittels

$$\mathfrak{v} = v_l\,\mathfrak{e}^{l}$$

erfolgt. Bei Bildung von

$$\mathfrak{v}_{,i} = v_{l|i}\,\mathfrak{e}^{l} \tag{4.10}$$

enthalten die kovarianten Differentialquotienten gemäß

$$v_{l|i} = v_{l,i} - \Gamma^{r}_{li}\,v_r$$

die auf den verformten Körper bezogenen *Christoffel*symbole. Einführung von (4.9) und (4.10) in (4.4) ergibt

$$\gamma_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(v_{i|k} + v_{k|i} - v^{r}\,|_{i}\,v_{r|k})\,, \tag{4.11}$$

womit die auf den verformten Körper bezogene Darstellung des Verzerrungstensors gewonnen ist.

Je nach der Wahl der Maßtensoren ist nun auch dem kovarianten Tensor γ_{ik} auf zwei Weisen ein gemischter Tensor zugeordnet, nämlich einmal der mit g^{ik} gebildete Tensor

$$\gamma^{i}_{k} = g^{li}\,\gamma_{lk} \tag{4.12}$$

und andererseits der mit $\overset{(0)}{g}{}^{ik}$ gebildete Tensor

$$\overset{(0)}{\gamma}{}^{i}_{k} = \overset{(0)}{g}{}^{li}\,\gamma_{lk}\,. \tag{4.13}$$

In der klassischen Elastizitätstheorie mit ihrer Beschränkung auf kleine Verschiebungen werden die in den Verschiebungskomponenten quadratischen Glieder vernachlässigt. Dies liefert

$$\overset{(0)}{v}_{i} = v_i\,,$$

und der Verzerrungstensor vereinfacht sich zu

$$\gamma_{ik} = \tfrac{1}{2}\,(v_{i|k} + v_{k|i})\,. \tag{4.14}$$

Auch die beiden Formen (4.12) und (4.13) der gemischten Komponenten stimmen dann überein:

$$\overset{(0)}{\gamma}{}^{i}_{k} = \gamma^{i}_{k}\,.$$

Die Komponenten des Verzerrungstensors sind nicht unabhängig voneinander. Aus dem Verschwinden des *Riemann-Christoffel*schen Krümmungstensors (2.35) folgen nämlich mit (4.4) nachstehende, als allgemeine Verträglichkeitsbedingungen bezeichneten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_{il,\,jk} + \gamma_{jk,\,il} - \gamma_{ik,\,jl} - \gamma_{jl,\,ik} - 2\,\gamma^{mn}\,(\Gamma_{m,\,li}\,\Gamma_{n,\,kj} - \Gamma_{m,\,ik}\,\Gamma_{n,\,lj}) + \\
&+ 2\,g^{mn}\,(\Gamma_{n,\,kj}\,\gamma_{[m,\,li]} + \Gamma_{m,\,li}\,\gamma_{[n,\,kj]} - \Gamma_{n,\,lj}\,\gamma_{[m,\,ik]} - \Gamma_{m,\,ik}\,\gamma_{[n,\,lj]}) + \\
&+ 4\,\gamma^{mn}\,(\Gamma_{n,\,kj}\,\gamma_{[m,\,li]} + \Gamma_{m,\,li}\,\gamma_{[n,\,kj]} - \Gamma_{n,\,lj}\,\gamma_{[m,\,ik]} - \Gamma_{m,\,ik}\,\gamma_{[n,\,lj]} + \\
&\qquad + \gamma_{[m,\,li]}\,\gamma_{[n,\,kj]} - \gamma_{[m,\,ik]}\,\gamma_{[n,\,lj]}) + \\
&+ 4\,g^{mn}\,(\gamma_{[m,\,li]}\,\gamma_{[n,\,kj]} + \gamma_{[m,\,ik]}\,\gamma_{[n,\,lj]}) = 0\,,
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

worin

$$\begin{aligned}
\gamma_{[i,\,rs]} &= \tfrac{1}{2}\,(\gamma_{ir,\,s} + \gamma_{is,\,r} - \gamma_{rs,\,i})\,, \\
\gamma^{mn} &= \overset{(0)}{g}{}^{mr}\,g^{nl}\,\gamma_{rl}\,.
\end{aligned}$$

Alle bisher abgeleiteten Beziehungen gelten völlig allgemein für jede beliebige kontinuierliche Massenverteilung. Das besondere Verhalten des Werkstoffes kommt erst durch die Spannungs-verzerrungsgleichungen zum Ausdruck, die einen Zusammenhang zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor vermitteln. Die Spannungs-Verzerrungsgleichungen können nur auf Grund experimenteller Untersuchungen erschlossen werden. Bei elastischen Werkstoffen und kleinen Verschiebungen kann in den meisten Fällen mit guter Näherung der Spannungstensor als lineare Funktion des Verzerrungstensors angesetzt werden. Für allgemeines anisotropes Verhalten lauten dann die das Eleastizitätsgesetz bildenden Spannungs-Verzerrungsgleichungen

$$s^{ik} = E^{ik\,lr}\,\gamma_{lr}\,, \tag{4.16}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß der unverformte Körper spannungsfrei ist. Die Größe $E^{ik\,lr}$ stellt einen Tensor vierter Ordnung dar, der den Symmetrieeigenschaften

$$E^{ik\,lr} = E^{ik\,rl} = E^{ki\,lr} = E^{lr\,ik}$$

genügt. Für isotropes Medium gilt insbesondere

$$E^{ik\,lr} = G\left(\overset{(0)}{g}{}^{il}\,\overset{(0)}{g}{}^{kr} + \overset{(0)}{g}{}^{kl}\,\overset{(0)}{g}{}^{ir} + \frac{2\,\mu}{1-2\,\mu}\,\overset{(0)}{g}{}^{ik}\,\overset{(0)}{g}{}^{lr}\right). \tag{4.17}$$

Darin bezeichnet G den Schubmodul und μ die Querkontraktionsziffer.

Werden die gemischten Komponenten des Spannungstensors und des Verzerrungstensors verwendet, so läßt sich das Elastizitätsgesetz für den vorliegenden Fall in die Form bringen

$$s^i_k = 2G\left(\gamma^i_k + \frac{\mu}{1-2\,\mu}\,\delta^i_k\,\gamma^r_r\right). \tag{4.18}$$

Darin ist

$$\gamma^r_r = \overset{(0)}{g}{}^{lr}\,\gamma_{lr} = v^r\,|_r \tag{4.19}$$

die kubische Dilatation.

Es sei noch erwähnt, daß (4.18) formal mit der Form des Elastizitätsgesetzes in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten übereinstimmt.

Wird (4.16) mit (4.17) in die Gleichgewichtsbedingungen (3.12) eingesetzt, so ergibt sich bei Beachtung von (2.37) und Berücksichtigung der Schreibweise (2.38)

$$v^i|^l_l + \frac{1}{1-2\,\mu}\,v^l|^i_l + \frac{\mathfrak{q}^i}{G} = 0\,. \tag{4.20}$$

Dies sind die allgemeinen Differentialgleichungen für den Verschiebungsvektor für den Fall kleiner Verschiebungen und isotropen Werkstoffs.

Für endliche Verschiebungen bereitet die Aufstellung des Elastizitätsgesetzes größere Schwierigkeiten, es soll daher darauf auch nicht näher eingegangen werden[1].

5. Zusammenfassung. Im ersten Teil der Arbeit wird eine gedrängte Zusammenstellung einiger der wesentlichsten Definitionen, Beziehungen und Formeln der Vektor- und Tensorrechnung in der Schreibweise des *Ricci*-Kalküls gegeben, wobei möglichste Klarheit und Verständlichkeit angestrebt worden ist. Dann wird gezeigt, wie bei Benutzung dieses mathematischen Werkzeuges die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeiner Form sehr einfach und elegant gewonnen werden können.

Nach Einführung des Spannungstensors werden die Gleichgewichtsbedingungen am verformten Volumenelement aufgestellt, der Verzerrungstensor definiert, sein Zusammenhang mit dem Verschiebungsvektor dargelegt und die Verträglichkeitsbedingungen angegeben. Dabei sind beliebige endliche Verschiebungen zugrunde gelegt worden. Schließlich werden das Elastizitätsgesetz und die Differentialgleichungen des Verschiebungsvektors für den Fall kleiner Verschiebungen bei isotropem Werkstoff aufgestellt.

Der von *J. Fadle*[2] behandelte Sonderfall der klassischen Elastizitätstheorie für orthogonale krummlinige Koordinaten ist in den Formeln (3.10) und (4.14) enthalten.[1] Es scheint, daß die hier gegebene Ableitung trotz ihrer Allgemeinheit einfacher und übersichtlicher ist als die bisher in der Literatur zu findenden Darstellungen.

[1] Vgl. hierzu *F. D. Murnaghan*, a. a. O., *E. A. Deuker*, a. a. O., *H. Richter*, Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 205.

[2] *J. Fadle*, a. a. O.

(Eingegangen am 18. Juni 1949.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Wolfgang Zerna*, (20 a) Hannover, Technische Hochschule.

Kurzes Lehrbuch der elektrischen Maschinen

Wirkungsweise · Berechnung · Messung

Von

Rudolf Richter

Mit 406 Abbildungen im Text. XII, 386 Seiten. 1949. Ganzleinen DMark 25,50

Inhaltsübersicht:

I. Einführung. – A. Magnetische und elektrische Begriffe und Gesetze. – B. Stromerzeugung. – C. Kraftübertragung. – D. Umformung. – *II. Die Ankerwicklungen.* – A. Gleichstrom-Ankerwicklungen. – B. Wechselstromwicklungen. – C. Isolierung. – *III. Berechnungsgrundlagen.* – A. Die induzierte EMK. – B. Die Felderregerkurve. – C. Drehmoment und Ausnutzung des Ankermantels. – D. Die elektromagnetischen Eigenschaften des Eisens. – – E. Magnetische Kennlinie bei Leerlauf. – F. Die Verluste. – G. Die Blindwiderstände. – H. Ortskurven. – J. RET und REM. – *IV. Transformator.* – A. Grundsätzlicher Aufbau. – B. Betriebsverhalten. – C. Sonderschaltungen. – D. Magnetisierungserscheinungen. – E. Streuungserscheinungen. – F. Entwurf. – G. Messungen. – *V. Induktionsmaschine.* – A. Grundsätzlicher Aufbau. – B. Der Drehtransformator. – C. Wirkungsweise der mehrphasigen Induktionsmaschine. – D. Anlaufschaltungen. – E. Drehzahlregelung. – F. Einphasenmaschine. – G. Entwurf. – H. Messungen. – *VI. Synchronmaschine.* – A. Grundsätzlicher Aufbau. – B. Ankerrückwirkung. – C. Die selbständige mehrphasige Synchronmaschine. – D. Die mehrphasige Synchronmaschine am Netz mit fester Spannung. – E. Einphasenmaschine. – F. Entwurf. – G. Messungen. – *VII. Die Gleichstrommaschine.* – A. Grundsätzlicher Aufbau. – B. Ankerrückwirkung. – C. Stromwendung. – D. Der magnetische Kreis der Wendepole. – E. Betriebseigenschaften der Generatoren. – F. Betriebseigenschaften der Motoren. – G. Entwurf. – H. Messungen. – *VIII. Einankerumformer.* – A. Übersetzungen, Stromwärme. – B. Ankerrückwirkung, Stromwendung, Spannungsverlust. – C. Betrieb des Umformers. – D. Entwurf. – E. Kaskadenumformer. – *IX. Einphasen-Stromwendermaschinen.* – A. Der Anker mit Stromwender im Wechselfelde. – B. Reihenschlußmotor. – C. Einphasenmaschinen mit Nebenschlußeigenschaften. – D. Repulsionsmotor. – E. Entwurf. – *X. Dreiphasen-Stromwendermaschinen.* – A. Der Läufer mit Stromwender im Drehfeld. – B. Reihenschlußmotor. – C. Ständergespeiste Nebenschlußmaschine. – D. Läufergespeiste Nebenschlußmaschine. – E. Entwurf. – *XI. Die Regelsätze.* – A. Begriff und Aufgaben. – B. Hilfsmaschinen. – C. Ortskurve des Stromes der IM. – D. IM mit blindstromerzeugender HM. – E. Drehzahlregelung. – F. Leistungsregelung. – G. Regelsatz mit Gleichstrom-HM.

Die Elektrotechnik und die elektromotorischen Antriebe

Lehrbuch für technische Lehranstalten und zum Selbstunterricht

Von

Dipl.-Ing. Wilhelm Lehmann

Professor an der Staatlichen Berufspädagogischen Akademie Hannover

Vierte Auflage. Mit 828 Textabbildungen und 128 Beispielen. V, 377 Seiten. 1948.
DMark 18,—

Inhaltsübersicht:

I. Der Magnetismus. – II. Die Elektrizität und ihre Anwendungen. – III. Der Wechselstrom. – IV. Der Drehstrom. – V. Die Lösung von Wechselstromaufgaben mit der symbolischen Methode. – VI. Elektrotechnische Meßkunde. – VII. Die Gleichstrommaschinen. – VIII. Die Einphasen- und Drehstromsynchronmaschinen. – IX. Die Transformatoren (Umspanner). – X. Die Asynchronmotoren. – XI. Die Stromwendermotoren für Einphasen- und Drehstrom. – XII. Die Umformer. – XIII. Die Stromrichter. – XIV. Das elektrische Kraftwerk. – XV. Die Übertragung elektrischer Arbeit. – XVI. Die Verteilung der elektrischen Energie. – XVII. Der elektromotorische Antrieb. – XVIII. Wichtige elektrische Antriebe. – Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Physik

Ein Lehrbuch

Von

Dr. Wilhelm H. Westphal

b. a. o. Professor der Physik an der Technischen Universität Berlin

Vierzehnte und fünfzehnte Auflage.

Mit 650 Abbildungen. XII, 758 Seiten. 1950

Ganzleinen DMark 29,70

Zum erstenmal seit dem Kriege ergab sich durch den vollständigen Neusatz dieser neuen Auflage die Möglichkeit zu einer großen Zahl lange geplanter Verbesserungen und Ergänzungen. Überdies ist vor einiger Zeit vom gleichen Verfasser sein neues, für Leser mit weniger weitgehenden Ansprüchen bestimmtes „Kleines Lehrbuch der Physik" erschienen. Deshalb hat er geglaubt, die Darstellung in dem vorliegenden Buche hier und da ein wenig vertiefen zu dürfen.

Das Kapitel „Relativitätstheorie" ist völlig neu geschrieben und wesentlich erweitert worden. Zum größten Teil wurde ferner das Kapitel über „Physik der Atomkerne" neu geschrieben, völlig neu auch das Kapitel „Astrophysik und Physik des Weltalls". Weitere Neufassungen und Erweiterungen finden sich in allen Teilen des Buches. Im Einvernehmen mit Prof. *R. W. Pohl* und Prof. *A. Eucken* wurde in § 50 der Begriff der Stoffmenge und der Mol- und Grammatommasse neu eingeführt, um die bisher mit dem Begriff Molekulargewicht verknüpften Schwierigkeiten zu beseitigen. Vielfach geäußerten Wünschen entsprechend, sind in zahlreichen Fußnoten biographische Angaben über die bedeutendsten Forscher gemacht worden.

Inhaltsübersicht:

Einleitung. – Mechanik der Massenpunkte und der starren Körper: Bewegungslehre. Die Lehre von den Kräften. Die allgemeine Gravitation. – Physik der Stoffe: Die Materie. Die Elastizität der festen und flüssigen Stoffe. Mechanik ruhender Flüssigkeiten. Mechanik ruhender Gase. Mechanik bewegter Flüssigkeiten und Gase. Schwingungen und Wellen. Schall. – Wärmelehre: Das Wesen der Wärme. Zustandsgleichungen. Wärmeenergie. Änderungen des Aggregatzustandes. Lösungen. Die drei Hauptsätze der Wärmelehre. Wärme und Arbeit. – Elektrostatik: Die elektrostatischen Erscheinungen im Vakuum. Die elektrischen Eigenschaften der Stoffe. – Elektrische Ströme: Elektrische Ströme in festen Leitern. Elektrische Ströme in flüssigen Leitern. Elektrische Ströme in Gasen. – Magnetismus und Elektrodynamik: Magnetische Felder im Vakuum. Die magnetischen Eigenschaften der Stoffe. Elektromagnetische Induktion. Elektromagnetische Geräte. Wechselstrom. Elektrische Maschinen. Elektrische Schwingungen und Wellen. – Optik und allgemeine Strahlungslehre: Das Wesen des Lichtes. Lichtmessung. Geometrische Optik. Wellenoptik. Das elektromagnetische Spektrum. Temperaturstrahlung. – Relativitätstheorie. – Quantentheorie. Atome und Moleküle. Kristalle: Quantentheorie des Lichtes. Quantentheorie der Atome und Moleküle. Quantenmechanik. Physik der Atomkerne. Ultrastrahlung. – Astrophysik und Physik des Weltalls. – Schlußwort. – Anhang. Namenverzeichnis. Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Druck von Großdruckerei Stähle & Friedel, Stuttgart. Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg. Printed in Germany.